الرياضيات المعاصرة

دراسة نظرية ومسائل

(١)

نظرية المجموعات

- المنطق الرياضي
- المجموعات
- العلاقات
- التوابع

تأليف

فئة من أساتذة التعليم الجامعي

مؤسسة الرسالة

[illegible]

[illegible] الكريم

كثر في الآونة الأخيرة وفي مختلف أقطار الأرض الحديث عن الثورة في الرياضيات وعن التطورات التي طرأت على هذه المادة ، كما أن مكتبات العالم أصبحت تضم عدداً كبيراً من المؤلفات في الرياضيات المعاصرة في حين لا تزال المكتبة العربية فقيرة جداً بل تكاد لا تحوي أي كتاب في هذا الموضوع .

ولم يقتصر أثر هذا التطور الذي طرأ على الرياضيات على مناهج التدريس في الجامعات ، بل أخذ طريقه إلى المدارس الثانوية ، وقد لا يكون بعيداً اليوم الذي يأخذ فيه طريقه إلى المدارس الابتدائية أيضاً .

ولذلك ، وتيسيراً للسبيل على الباحثين في البلاد العربية رأت مؤسسة الرسالة أن تعهد إلى نخبة من أساتذة التعليم الجامعي ممن يهتمون بمثل هذه المواضيع بالمشاركة في إعداد سلسلة من الكتب غايتها :

(١) أن تساعد الطالب الجامعي الذي لم يتيسر له الاطلاع على الرياضيات المعاصرة من قبل .

(٢) أن تكون مرجعاً للاستاذ في التعليم الثانوي الذي يقوم بتدريس هذه المواد في تلك الأقطار التي أدخلت في مناهجها الرياضيات المعاصرة .

(٣) أن تفيد الطالب الثانوي وتمكنه من الفهم الصحيح بما تقدمه من دراسة نظرية ومسائل .

ولا يسع هذه المؤسسة إلا أن تقدم شكرها العميق لهؤلاء الأساتذة لتجاوبهم مع هذا المشروع ولاهتمامهم به .

وأخيراً فان مؤسستنا ، وهي تفخر بمبادرتها هذه التي تخدم أول ما تخدم المستوى الثقافي لأبناء أمتنا ، ترجو ان تكون بعملها هذا قد سدت ثغرة من الثغرات والله الموفق . بيروت ١٣٩١ – ١٩٧١

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

مُقَدِّمَة

يكثر الحديث في هذه الأيام عن الرياضيات المعاصرة وتكاد تكون هذه الرياضيات موضع اهتمام جميع العاملين في ميادين العلم والتربية في جميع أنحاء العالم. وليس العالم العربي بمعزل عن الجهود العالمية التي تبذل لدعم الاتجاه المعاصر لدراسة الرياضيات، فالتعليم الجامعي في أكثر البلاد العربية احتضن هذا الاتجاه منذ سنوات، والتعليم الثانوي في طريقه - بالتعاون مع اليونسكو - إلى وضع برامج جديدة للرياضيات على مستوى العصر الذي نعيشه وتطبيق هذه البرامج بعد تجريبها وتقويم نتائج التجربة. ويُذكر بهذه المناسبة الجهد الطيب المبذول في الجمهورية العربية السورية حيث بدأ طلاب الصف الثاني الثانوي العلمي منذ مطلع العام الدراسي ١٩٧٠ - ١٩٧١ بدراسة مبادىء نظرية المجموعات إحدى دعامات الرياضيات المعاصرة وذلك ضمن مناهج جديدة للرياضيات تعمل على استخدام هذه النظرية على أوسع نطاق ممكن.

ودعماً لجميع الجهود المبذولة على المستويين الجامعي والثانوي رأينا أن نضع بين يدي القارىء العربي سلسلة كتب عن الرياضيات المعاصرة. وسنحاول تقديم هذه السلسلة بأسلوب ينتفع منه المبتدئون في دراسة هذه الرياضيات وبطريقة يستفيد منها المطلعون عليها والراغبون في المزيد من الاطلاع. ولا نشترط في قارئنا معرفة رياضية واسعة ولكن يهمنا أن

يكون لديه قدرة على التجريد وهـذا مـا نعتقده موفوراً لدى طلاب الحلقة الثانوية وما بعدها .

وسنبدأ كتابنا الأول هذا بتمهيد يعرّف بطبيعة الرياضيات المعاصرة وأهميتها وسنتبعه بعرض موجز لمبادىء المنطق الرياضي وبتعريف المجموعة والعمليات على المجموعات . ننتقل بعد ذلك الى دراسة العلاقات والتوابع . ونختم الكتاب في البحث في قدرة المجموعة .

ويجد القارىء في كل فصل عرضاً نظريـاً وعدداً وافراً من المسائل والتمارين المحلولة يتبعه عدد آخر من المسائل والتمارين غير المحلولة مع أجوبتها.

وإنا إذ نقدم هذه المواضيع نأمل أن نكون قد أخذنا بيد أبناء أمتنا لتزويدهم بثقافة عصرية ضرورية . والله نسأل أن يلهم الجميع سبيل الرشاد ويوفقهم لما فيه خيرهم وفلاحهم والله ولي التوفيق .

المؤلفون

تمهيد

الرياضيات قديمة جداً ، ونشأت مع الانسان القديم ومحاولاته الأولى . ولقد ساهمت الحضارات الانسانية المختلفة في إغنائها ، فالهنود والمصريون واليونان والعرب أصحاب فضل كبير في تطوير فروع شتى من الرياضيات مثل الحساب والجبر والفلك وغيرها . .

وشهدت الرياضيات في القرن التاسع عشر وبداية هذا القرن دفعاً كبيراً وتعديلات أساسية ، الأمر الذي جعل البعض يميل إلى الاعتقاد أن ما حدث في الرياضيات من تطور خلال المئة سنة الأخيرة قد يفوق ما حدث منذ نشأة الرياضيات إلى ذلك الحين .

وكانت الرياضيات بادىء الأمر أداة في يد علماء الفيزياء غير أنها غزت بعد ذلك جميع فروع العلوم من كيمياء وجيولوجيا وطبيعة ، ثم تعدت الأمر بعد ذلك إلى العلوم الاجتماعية والاقتصادية والتربوية والنفسية . وقد يأتي اليوم الذي لا يمكن فيه لأي علم أن يستغني عن الرياضيات وعن طريقتها في البحث .

ويمكن اعتبار الرياضيات قد مرت بمراحل ثلاث :

١ – **مرحلة الرياضيات التقليدية** : وتمتد حتى منتصف القرن التاسع عشر ، وكان الاهتمام في هذه الفترة منصباً على علوم أساسية أربعة هي : الحساب والهندسة والجبر والتحليل .

٢ – **مرحلة الرياضيات الحديثة** : وتمتد منذ منتصف القرن التاسع

عشر إلى فترة قريبة ، وتطورت في هذه المرحلة مواضيع الرياضيات التقليدية وأضيفت مواضيع جديدة (المصفوفات ، أسس الهندسة ، الجبر الخطي . . .)

٣ – مرحلة الرياضيات المعاصرة : وهي المرحلة التي نعيشها الآن وتمتاز هذه المرحلة بما يلي :

(١) لقد أصبح للرياضيات لغة خاصة بها ، فهي تستعمل عدداً كبيراً من الرموز يصعب على غير الرياضيين فهمها ، ولكنها بالوقت نفسه ذات أهمية كبيرة وبدونها يصعب متابعة العمل . ولم تستعمل الرموز في الرياضيات المعاصرة فقط بل كانت تستعمل ، ولو بنسبة أقل ، منذ القديم ، فلولا الرموز لما تقدم علم الجبر مثلاً ولما أخذت العمليات الحسابية شكلاً مبسطاً.

وللتعرف على مدى الفائدة من استعمال الرموز نذكر بأن عملية القسمة التي كانت في العصور الوسطى تدرس في المعاهد العليا بسبب من تعقيدها أصبحت الآن تدرس في المراحل الابتدائية .

(٢) يلعب مفهوما **المجموعة والعلاقة** دوراً هاماً في الرياضيات المعاصرة. وتقدم نظرية المجموعات التي تتناول بسط هذين المفهومين وما يتصل بهما من مفاهيم وقضايا متنوعة ، أدوات فعالة وأساليب ناجعة لدراسة أي موضوع من الموضوعات الرياضية .

(٣) تدمج الرياضيات المعاصرة بين عدة مواضيع رياضية مختلفة ، كانت في الماضي وحدات مستقلة ، لتجعل منها كلاً متماسكاً . فالمفاهيم الجديدة أكثر شمولاً من القديمة . والدراسة الجديدة هي دراسة لـ **بنى رياضية عامة** قد تكون عناصرها كميات جبرية شعاعية ، قد تكون نقطاً أو مستقيمات أو تحويلات . والعمليات التي تؤثر على هذه العناصر قد تكون عمليات الحساب المعروفة وقد تكون عمليات جديدة . والنتائج التي تحصل

عليهـا من دراسة هذه البنى تكون صحيحة مهما كانت العناصر ومهما كانت العمليات .

فالرياضيات المعاصرة تعمل على التقريب بين المواضيع الأربعة الرئيسية للرياضيات التقليدية (الحساب والهندسة والجبر والتحليل) والتي ما زالت تدرس في مراحل الدراسة المختلفة على أنها مواضيع مستقلة .

(٤) تتجه الرياضيات المعاصرة نحو التجريد مبتعدة عن المحسوسات. وهي بخاصتي **التعميم والتجريد** تتمكن من تلبية حاجة الكثير من الفروع الرياضية والفيزيائية وغيرها ..

وقد يتبادر إلى الذهن أن اتجـــاه الرياضيات نحو التجريد يجعلها بعيدة عن التطبيقات العملية ويعزلها عن التأثير في تطور العلوم الأخرى. ولكن الأمر يبدو أنه في غير ذلك ، فالتجريد وسع مدى شمول استخدام المفاهيم الرياضية الجديدة ، فالفراغ الشعاعي (أحد موضوعات الجبر المجرد) يفيد في الميكانيك والفيزياء والتحليـل ... والقليـل من القوانين المجردة يساعدنا على التحكم في كثير من المسائل التطبيقية .

(٥) وتعتمد الرياضيات المعاصرة على الاسلوب الافتراضي فهي تبدأ بطرح عدد من المبادىء (المسلمات) ثم تستخرج منها النظريات بالطرق الاستنتاجيه . فالرياضيات اذن ليست علماً مطلقاً بل هي علم نسبي يرتبط كلياً بالمبادىء التي انطلق منها .

(٦) تعتمد الرياصيات المعاصرة في عرض قضاياها على قواعد المنطق الصوري بشكـل رئيسي ، حتى أن الفيلسوف راسل Russel يبين في كتابه « أسس الرياضيات » أن المنطق والرياضيات شيء واحد . واعتماد الرياضيات المعاصرة على المنطق أكسبهـا وضوح الفكرة ودقـة التعبير وزودها بأسلوب موجز لعرض القضايا الرياضية .

وبالرغم من كل ما سبق فانــه لا يمكن اعتبار الرياضيات المعاصرة شيئاً منفصلاً عن الرياضيات التقليدية وهي لا تحل محلها . بل تعمل ، كما رأينا ، على وضع الرياضيات التقليدية في كيان واحد . كما انها تعمق فهمنا لها . فالرياضيات في تطور مستمر وشهدت عبر القرون في مسيرها انعطافات جليلة كان لها الأثر الكبير على العلوم الأخرى . وهي بالمرحلة المعاصرة تشهد أحد هذه المنعطفات قد يبالغ في تقدير قيمتها بادىء الأمر ولكنها لا تلبث بعد فترة من أن تأخذ مكانها الطبيعي .

* * *

الفصل الأول

أسس المنطق الرياضي

١ – المقالة الرياضية : هي مقالة مؤلفة من تتابع العبارات والرموز من الكلمات والأسماء والأفعال وغيرها، وتتكون هذه المقالة من وحدات لكل منها دلالة مفيدة . واذا علمنا أن علماء اللغة يقسمون الكلام إلى خبر وإنشاء ، وأن الأول ما يصح أن يوصف قائله بالصدق أو الكذب ، والثاني ما خالف ذلك ، فإن الجمل التي تدخل في المقالة الرياضية هي جمل خبرية حصراً ولكي نميز هذا النوع من الجمل نسمي كلاً منها قضية (Proposition) .

أمثلة :

١ – إن قولنا « ارسم مثلثاً أضلاعه ٢ ، ٣ ، ٤ د » ليس بقضية

٢ – وقولنا « للمعادلة ٢ س^{٢} – ٥ س – ٣ = ٠ أربعة جذور » قضية كاذبة .

٣ – وقولنا « جذرا المعادلة س^{٢} – ٣ س + ٢ = ٠ هما العددان ١ ، ٢ » قضية صادقة .

٤ – « اذا كانت أطوال أضلاع شكل رباعي متساوية فهو مربع » قضية كاذبة .

٥ – « إن القمر سيارة تدور حول الأرض » قضية كاذبة .

... القضية الرياضية ... [illegible]

... رياضي ... [illegible] ... ٢ ... [illegible]

... $\sqrt{7}$ ... [illegible]

... [illegible] ...

... لأنه تكون ... [illegible]

... أجل ... مجموعة الأعداد ...

وكثيراً ما يختلف الحكم على قضية ... [illegible]

أو الأشخاص الذين تتعلق بهم ... [illegible]

... إلى ما ... [illegible]

... [illegible] ...

... [illegible] ...

... [illegible] ...

... لا ... [illegible]

... [illegible] ... قضية ... [illegible]

... [illegible] ...

... المثلث ... [illegible]

... [illegible] ...

... أو على الأعلى ... [illegible]

أمثلة :

١ – العدد ٥٣ يقبل القسمة على ... [illegible]

... [illegible] ...

٢ – « إن العدد $\sqrt{٣}$ = ١٫٧ » قضية نرمز لها بـ (ب)
و « $\sqrt{٣}$ ≠ ١٫٧ » القضية النافية للقضية السابقة ونرمز لها بـ (~ ب) .

٣ – « إن المثلث ب حـ ى متساوي الأضلاع » قضية نرمز لها بـ (حـ) و « إن المثلث ب حـ ى قائم الزاوية » قضية أخرى لا يمكن تسميتها بالقضية النافية لـ حـ لأن هناك مثلثات ليست بمتساوية الأضلاع ولا قائمة الزاوية .

٣ – **ساحة القضية الرياضية** : تتعلق كل قضية رياضية بفئة معينة من الأشياء . نسمي عادة مجموعة هذه الأشياء **ساحة القضية** (مجال ، مجموعة تعريف) ونرمز لكل فرد من أفراد هذه الساحة بأحد الحروف (س ، ع ، ف ...) التي تمثل عادة المقادير المجهولة . نسمي هذا الحرف متحول هذه القضية فاذا قلنا « إن س مثلث قائم الزاوية » فإن هذه الجملة لا تمثل قضية ما لم نستبدل بالمتحول س مثلثاً معيناً من مجموعة المثلثات (ساحة القضية) كقولنا « إن المثلث التي تقاس أضلاعه بالأعداد ٣ ، ٤ ، ٥ هو مثلث قائم الزاوية » .

إذا درسنا قضية من هذا النوع عندما يتنقل متحولها ضمن ساحتها فإننا سنتوصل الى تجزئة هذه الساحة إلى أقسام تكون القضية على بعضها صحيحة دوماً وخاطئة دوماً على البعض الآخر ، ونصف هذه القضية عند تنقل متحولها على أجزاء الساحة التي تكون فيها صحيحة بالحرف (ص) ونعطيها الحرف (خ) على أجزاء الساحة التي تكون عليها خاطئة. وقد اتفق أن نسمي كل حرف من هذين الحرفين « قيمة القضية » وأن يستبدل بهذين الحرفين في جبر القضايا ، العددان (٠ ، ١) حيث يمثل العدد (٠) قيمة القضية الخاطئة ويمثل العدد (١) قيمة القضية الصحيحة.

٤ – **أسس الرياضيات – المفاهيم والمبادىء** : لقد درسنا أقساماً من

الهندسة الاقليدية في السنوات الأولى من المدارس الثانوية ورأينا أن هذا العلم لا يتكون من مجموعة مبعثرة من المعلومات مستقل بعضها عن بعض بل إنها أفكار مترابطة نستنتج كل فكرة من أخرى بمحاكمة متسقة نسميها **المحاكمة المنطقية** وتستند كل قضية على قضيه أخرى حتى نصل إلى نفر قليل من القضايا الأساسية التي نقبلها بدون برهان ونسميها مبادىء الهندسة الاقليدية (مسلمات ، مصادرات ، موضوعات) وتستند الهندسة المستوية الإقليدية إلى المبادىء الأساسية التالية :

١ – يمر من نقطتين مختلفتين مستقيم واحد فقط

٢ – إذا كان ى مستقيماً و ب نقطة خارجة عنه ، فإنه يمكن إنشاء مستقيم موازٍ لـ ى من النقطة ب وهذا المستقيم وحيد (مسلمة إقليدس).

وإن لكل فرع من فروع العلوم الرياضية مبادىء أولية نقبلها بدون برهان ونستند اليها من أجل برهان بقية قضايا هذا العلم .

ولقد عملنا في الهندسة على أشياء هي الأشكال الهندسية وأعطينا لكل منها تعريفاً يربط بين هذا الشيء وشيء آخر سبق أن عرفناه إلى أن نصل إلى أشياء لا نعطيها أي تعريف بل نفهمها كما يفهمها غيرنا ونسميها المفاهيم (Notions) مثل مفهوم النقطة والمستقيم والمستوي في الهندسة ومفهوم العددالطبيعي في الحساب ومفهوم المجموعة في حساب المجموعات.

٥ – **المحاكمة الرياضية والمنطق** : لقد وصفنا المحاكمة الرياضية بأنها منطقية فما هو دور المنطق بالنسبة للعلم ؟.

إن للمنطق وظيفة يؤديها للعلم وللعلوم الرياضية بصورة خاصة وهي أن يقوم بتحليل المفاهيم والمبادىء التي يستند اليها هذا العلم ويناقش الطرائق التي يستعملها للتوصل إلى الحقيقة وإلتماس الشروط التي تجعل قضية ما صادقة بالنسبة للمبادىء المذكورة .

ويقوم المنطق على قبول قوانين ثلاثة للفكر هي :

٢ – [illegible] الذاتية (الهوية) : الذي يحكم الفكر بمقتضاه أن الشيء المعين هو هو بنفسه مهما اختلف سياقه ويعبرون عن هذا القانون تعبيراً رمزياً كما يلي :

[illegible]

٣ – قانون عدم التناقض : وهو الذي يحكم الفكر بمقتضاه ، أنه لا يمكننا أن نصف شيئاً بصفة ونفيها عنه في آن واحد ، والصورة الرمزية لهذا القانون هي :

لا يمكن [illegible] في آن واحد

[illegible] خاطئ ، دوماً (مستحيل)

أي [illegible] إذا تحققت القضية [illegible] انتفى نقيضها (القضية النافية لها) [illegible] القطعي [illegible] موجباً لا يمكن أن يكون في الوقت [illegible]

[illegible] قانون الثالث المرفوع : وهو الذي يحكم الفكر بمقتضاه بأنه [illegible] أن يتصف الشيء إما بصفة معينة أو بنقيضها فالشيء [illegible] مثلاً [illegible] أبيض أو لا أبيض ولا ثالث [illegible] الاحتمال [illegible] بعد [illegible] اللون الأبيض كما أن العدد الصحيح [illegible] إما أن يقبل القسمة [illegible] أو لا يقبل القسمة على [illegible] ليس هناك احتمال ثالث يصلح أن [illegible] العدد [illegible] قابلية القسمة على العدد [illegible]

[illegible] الرمزية لهذا القانون هي :

[illegible] أو [illegible]

حيث (أو) هنا حرف [illegible] يعني إما الأول وإلا فالثاني .

[illegible]

(إلا إذا) وغيرها من الكلمات التي نسميها بأدوات ربط كقولنا :

« ٥ عدد طبيعي و يقبل القسمة على ٢ » .

« المثلث ب حـ ء متساوي الأضلاع أو قائم الزاوية » .

« إذا كان س > ٤ فإن س > ٠ » .

« زوايا المربع قائمة مع أن زوايا المعين قد لا تكون قائمة » .

« لا يكون المثلث متساوي الساقين إلا إذا كان له زاويتان متساويتان »

ونقول عن جملة خبرية مفيدة إنها **قضية بسيطة** فيما إذا لم يكن من الممكن توزيعها إلى جملتين خبريتين مفيدتين مرتبطتين بإحدى أدوات الربط كما هي حال الجمل التالية :

« القمر منير » ، « العدد ١٦ زوجي » ، « الشكل ب حـ ء هـ مربع » ، « زوايا المعين غير قائمة » .

وإذا ربطنا مجموعة من القضايا البسيطة بأدوات ربط حصلنا على قضية جديدة نسميها **قضية مركبة** . ونسمي التركيب المؤلف من القضايا البسيطة هذه وأدوات الربط **البنية المنطقية** للقضية المركبة .

إن وظيفة جبر القضايا هي تكوين القضايا المركبة ودراسة تأثير البنية المنطقية على القضية المركبة واستنتاج قيمة هذه القضية انطلاقاً من القيم المختلفة للقضايا البسيطة الداخلة في تركيبها آخذاً بعين الإعتبار أدوات الربط التي يحويها التركيب المذكور .

ومن المعلوم أن بعض أدوات الربط تستخدم في اللغة لأكثر من معنى وهو أمر غير مستساغ في الرياضيات . وقد تم الاتفاق في المنطق الرياضي على اعطاء كل أداة الربط معنىً محدداً لا لبس فيه ولا غموض . ونبين كيف نستخدم أدوات الربط في المنطق الرياضي بدراسة الصور المهمة لتركيب القضايا .

ولما كانت دراستنا للقضايا المركبة ستبدأ بتركيب قضيتين فمن المفيد

أن نذكر أن الحالات المختلفة لقيمتي القضيتين ب ، حـ معاً أربع كما هو مبين في الجدول الآتي :

ب	حـ
١	١
١	٠
٠	١
٠	٠

٧ – القضايا المركبة الأساسية :

١ً – **الاقتضاء** : نستعمل في اللغة الدارجة تراكيب شرطية تتكون من جملة أولى تسمى الشرط وجملة ثانية تدعى جواب الشرط وتربط بينهما أداة ربط تدعى أداة الشرط مثل قولنا « إذا كان المثلث متساوي الساقين فإن منصف زاوية الرأس فيه ينصف القاعدة » .

نلاحظ أن هناك رابطة بين الجملة الأولى والجملة الثانية فالجملة الأولى سبب للثانية وتحقق الأولى شرط لتحقق الثانية كما أن تحقق الثانية لازم عن تحقق الأولى .

نقول « إن تحقق الأولى يؤدي إلى تحقق الثانية » أو « إن تحقق الأولي يقتضي تحقق الثانية » ونسمي العلاقة التي تربط القضية الأولى بالقضية الثانية علاقة اقتضاء واذا رمزنا للقضية الأولى بـ ب وللقضية الثانية بـ حـ فاننا نصور القضية الشرطية المركبة بالشكل :

ب ⇐ حـ

ونقرأ ذلك : ب يؤدي إلى حـ أو ب يقتضي حـ

إن معنى الإقتضاء في المنطق الرياضي يختلف قليلاً عن معناه الدارج

الذي أوردناه أعلاه إذ أن الاقتضاء الرياضي ب ⇐ ح هو بالتعريف القضية المركبة من ب و ح والتي تتحقق دوماً إلا في الحالة التي تكون فيها ب صحيحة و ح خاطئة.

مثال : إن قولنا « إذا كان اليوم صحواً فسنذهب إلى الحديقة » قضية شرطية تمثل اقتضاء وهي غير كاذبة إلا في الحالة التي يكون فيها الجو صحواً ولا نذهب إلى الحديقة ويكون هذا الاقتضاء صادقاً في الحالات الثلاث التالية :

١ً « اذا كان اليوم صحواً » و « ذهبنا الى الحديقة »

٢ً « إذا لم يكن اليوم صحواً » و « ذهبنا إلى الحديقة »

٣ً « إذا لم يكن اليوم صحواً » و « لم نذهب الى الحديقة ».

ويمكن تلخيص تعريف الاقتضاء في جدول يبين الحالات التي تكون فيها هذه القضية المركبة صحيحة أو خاطئة. ويسمى هذا الجدول جدول الحقيقة لقضية الاقتضاء.

ب	ح	ب ⇐ ح
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	١
٠	٠	١

ملاحظة :

نقول عن القضية ب إنها غير منسجمة مع ح فيما إذا كان (ب ⇐ ~ ح).

٢ ـ التكافؤ : نقول ، تعريفاً ، إن القضيتين ب ، حـ متكافئتان في إذا اقتضت كل واحدة منهما الأخرى أي اذا كان :

(ب ⇐ حـ) و (حـ ⇐ ب)

ونرمز لذلك بالشكل :

ب ⇔ حـ

ونذكر ذلك بقولنا : « إن الشرط اللازم والكافي لتحقق حـ هو تحقق ب » . أي أنه يكفي لتحقق حـ أن تتحقق ب كما أنه يلزم لتحقق حـ أن تتحقق ب فلا تتحقق حـ إلا إذا تحققت ب وإذا تحققت ب فسوف تتحقق حـ .

ويمكن تعريف تكافؤ قضيتين بجدول الحقيقة التالي :

ب	حـ	ب ⇔ حـ
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	٠
٠	٠	١

الذي يبين أن القضية ب ⇔ حـ صحيحة إذا كانت ب ، حـ صحيحتين معاً أو خاطئتين معاً .

مثال (١) : (المثلث ب حـ ء متساوي الأضلاع) ⇔ (المثلث ب حـ ء متساوي الزوايا) .

مثال (٢) : (ب حـ ء هـ مربع) ⇔ (أضلاع وزوايا ب حـ ء هـ متساوية)

٣ – الربط بـ (و) : إذا كانت ب ، حـ قضيتان وقلنا (ب و حـ) فاننا نعني بذلك قضية تتحقق إذا تحققت ب وتحققت حـ معاً وتكون هذه القضية خاطئة في الحالات الأخرى أي في الحالات الثلاث التالية :

١ – إذا تحققت ب وانتفت حـ
٢ – إذا انتفت ب وتحققت حـ
٣ – إذا انتفى كل من ب و حـ

ويرمز عادة للقضية (ب و حـ) بالشكل ب ∧ حـ .

مثال (١) : اذا كانت ب هي القضية : (المثلث ب حـ ى متساوي الساقين)

و حـ القضية : (المثلث ب حـ ى قائم الزاوية)

فان ب ∧ حـ هي القضية : (المثلث ب حـ ى قائم ومتساوي الساقين) .

مثال (٢) : اذا كانت ب القضية « ٥ تقسم ٢٥ » ونكتبها رمزاً بالشكل (٥ | ٢٥)

و حـ القضية : (٥ | ٣٠)

فان ب ∧ حـ هي القضية : (٥ | ٢٥ و ٣٠)

ويمكن تلخيص تعريف القضية ب ∧ حـ في جدول الحقيقة الآتي :

ب	حـ	ب ∧ حـ
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	٠
٠	٠	٠

خاصة (١) :

يبرهن في التمرين المحلول رقم (٩) المبين في نهاية هذا البحث أن :

ب ∧ حـ ⇔ حـ ∧ ب

ونقول إن الربط بـ (و) **تبديلي** .

مثال : إن قولنا : [(٥ | ٢٥) و (٥ | ٣٠)]
يكافىء قولنا : [(٥ | ٣٠) و (٥ | ٢٥)]

خاصة (٢) :

يتم بالتدريج ربط ثلاث قضايا ب ، حـ ، ى بـ (و) بأحد الشكلين التاليين :

(ب ∧ حـ) ∧ ى ، ب ∧ (حـ ∧ ى)

والشكل الأول يعني أننا نربط القضية (ب ∧ حـ) بالقضية ى ،
والشكل الثاني يعني أننا نربط القضية ب بالقضية (حـ ∧ ى) .

ويبرهن في التمرين المحلول رقم ١٢ المبين في نهاية هذا البحث أنّ :

(ب ∧ حـ) ∧ ى ⇔ ب ∧ (حـ ∧ ى)

ونقول إن (الربط بـ و) **تجميعي** :

مثال : إن قولنا: [(« ٥ | ٢٥ » و « ٥ | ٣٠ ») و (٥ | ١٥)] يكافىء
قولنا : [(٥ | ٢٥) و (« ٥ | ٣٠ » و « ٥ | ١٥ »)] .

خاصة (٣) :

يتمتع الربط بـ (و) بالخاصة :

ب ∧ ب ⇔ ب

وهذا واضح لأن القضية ب ∧ ب تتحقق فيما إذا تحققت ب وتحققت ب

٤ – الربط بـ (أو) : استخدمنا في الفقرة (٦) أو التخيير التي تعني إمـا الأول وإلا فالثـاني ، كقولنا « ان المثلث ب حـ ى قائم الزاوية أو متساوي الأضلاع » . ولحرف العطف (أو)[1] معنى آخر يتضح في قولنا (جالس العلماء أو الزهاد) حيث يمكنك أن تجالس من كان عالماً فقط أو من كان زاهداً فقط أو من كان عالماً وزاهداً معاً . وتسمى (أو) في مثل هذه الحالة (أو الإباحة) .

وهذا المعنى هو المتفق عليه في الرياضيات عند ربط القضايا بالحرف (أو) ، فاذا كانت لدينا القضيتان ب ، حـ وقلنـا (ب أو حـ) فإننـا نكون أمـام قضية تتحقق إذا تحققت واحدة على الأقـل من القضيتين ب ، حـ . وتكون هذه القضية خاطئة في الحالة الوحيدة التي لا تتحقق فيها ب ولا تتحقق فيها حـ . وتكون محققة في الحالات الثلاث التالية:

١ – اذا تحققت ب وانتفت حـ
٢ – اذا انتفت ب وتحققت حـ
٣ – اذا تحقق كل من ب و حـ

ويرمز عادة للقضية (ب أو حـ) بالرمز (ب v حـ) .

مثال : (إن س عدد طبيعي يقبل القسمة على ٢ أو ٣) قضية محققة من أجل الأعداد التي تقبل القسمة على ٢ ولا تقبل القسمة على ٣ ، ومن أجل الأعداد التي تقبل القسمة على ٣ ولا تقبل القسمه على ٢ ، ومن أجل الأعداد التي تقبل القسمة على ٢ و ٣ أي الأعداد التي تقبل القسمة على ٦ . وتنتفي هذه القضية من أجل كل الأعداد التي لا تقبل القسمة على ٢ ولا تقبل القسمة على ٣ .

ويمكن تلخيص تعريف القضية ب v حـ في جدول الحقيقة التالي :

---

(١) راجع كتاب جامع الدروس العربية للشيخ مصطفى الغلاييني الجزء الثالث .

ب	حـ	ب ∨ حـ
١	١	١
١	٠	١
٠	١	١
٠	٠	٠

خاصة (١) :

يبرهن في التمرين المحلول رقم (١٠) المبين في نهاية هذا البحث أنّ :

ب ∨ حـ ⟺ حـ ∨ ب

ونقول (إن الربط بـ أو) تبديلي .

مثال : إن قولنا : [(عمر يدرس الأدب) أو (عمر يدرس القانون)]

يكافىء قولنا : [(عمر يدرس القانون) أو (عمر يدرس الأدب)]

خاصة (٢) :

ويبرهن في التمرين رقم (١١) المبين في نهاية هذا البحث أنّ :

(ب ∨ حـ) ∨ د ⟺ ب ∨ (حـ ∨ د)

ونقول (إن الربط بـ أو) تجميعي .

مثال : إن قولنا : [(عمر يدرس الأدب أو عمر يدرس القانون) أو (عمر يعمل مدرساً)]

يكافىء قولنا : [(عمر يدرس الأدب) أو (عمر يدرس القانون أو عمر يعمل بمدرساً)] .

خاصة (٣) :

يتمتع الربط بـ (أو) بالخاصة :

ب ∨ ب ⇔ ب

وهذا واضح لأن القضية ب ∨ ب تكون محققة في كل من الحالات الثلاث التالية :

١ – إذا تحققت ب وانتفت ب وهذا مستحيل
٢ – إذا انتفت ب وتحققت ب وهذا مستحيل أيضاً
٣ – إذا تحققت ب وتحققت ب

ويمكن توضيح ما سبق بجدول الحقيقة التالي :

ب	ب	ب ∨ ب
١	١	١
٠	٠	٠

وبمقارنة العمودين الأخيرين نتأكد من صحة هذه الخاصة .

٨ – خواص هامة للربط بـ (و) والربط بـ (أو) :

إذا كانت ب ، ح ، ء ثلاث قضايا كان لدينا :

أولاً :

ب ∧ (ح ∨ ء) ⇔ (ب ∧ ح) ∨ (ب ∧ ء)

ويقال إن (الربط بـ و) **قابل للتوزيع على الربط بـ أو .**

مثال : إن القضية [« ٥ | ١٠ » و (« ٥ | ٣٠ » أو « ٥ | ٣٥ »)] ⇔
القضية [(« ٥ | ١٠ » و « ٥ | ٣٠ ») أو
(« ٥ | ١٠ » و « ٥ | ٣٥ »)]

ثانيا :

ب ∨ (ح ∧ ء) ⇔ (ب ∨ ح) ∧ (ب ∨ ء)

ويقال (إن الربط بـ أو) قابل للتوزيع على (الربط بـ و) .

مثال : القضية [« ٥ | ١٠ » أو (« ٥ | ٣٠ » و « ٥ | ٣٥ »)] ⇔
القضية [(« ٥ | ١٠ » أو « ٥ | ٣٠ ») و (« ٥ | ١٠ »
أو « ٥ | ٣٥ »)] .

٩ – الرموز التقديرية : لقد رأينا أنه قد يكون للقضية ب متحول وأن هذه القضية قد تتحقق من أجل كل قيمة لهذا المتحول أو من أجل بعض قيم هذا المتحول (قيمة واحدة على الأقل) أو أنها لا تتحقق من أجل أي قيمة لهذا المتحول . وقد اتفق من أجل الإختصار في الكلام أن يمثل كل من الحالتين الأولى والثانية برمز خاص ، فيرمز للحالة الأولى بالشكل :

∀ (س) ب (س)

ونقرأ ذلك بقولنا **« مهما كانت قيمة س فان القضية ب محققة »**

أما الحالة الثانية فيرمز لها بالشكل :

∃ (س) ب (س)

ونقرأ ذلك بقولنا : **« تتحقق القضية ب من أجل قيمة واحدة على الاقل لـ س »** .

نسمي ∀ **بالرمز الكلي** كما نسمي ∃ **رمز الوجود** .

مثال ١ – اذا رمزنا بـ س لمثلث متساوي الأضلاع وذكرنا القضية ب التالية :

« إذا كان س مثلثاً متساوي الأضلاع فان س مثلث متساوي

الزوايا » فان هذه القضية صحيحة من أجل كل س ونرمز لذلك بالشكل :

∀ (س) ب (س)

مثال ٢ – إذا رمزنا بـ س لمثلث كيفي من مجموعة المثلثات وذكرنا القضية التالية :

« إن س مثلث قائم »

فان هذه القضية محققة من أجل بعض المثلثات أي من أجل بعض قيم س فنرمز لذلك بالشكل :

∃ (س) ب (س)

إن كلا من الشكلين ∀ (س) ب (س) ، ∃ (س) ب (س) يمثل قضية وليست إحداهما نافية للأخرى بل إن القضية الأولى حالة خاصة من الثانية .

يمكن نفي كل من هاتين القضيتين فننفي قولنا « مهما كانت س فان ب محققة » بقولنا « يوجد على الأقل قيمة واحدة لـ س تكون من أجلها ب غير محققة » .

وننفي القضية « يوجد على الأقل قيمة واحدة لـ س تكون فيها القضية محققة » بقولنا « من أجل كل قيمة لـ س تكون القضية ب غير محققة » .

نكتب ما تقدم بشكل رمزي :

~ ∀ (س) ب (س) ⇔ ∃ (س) ~ ب (س)

~ ∃ (س) ب (س) ⇔ ∀ (س) ~ ب (س)

تمارين محلولة

القضايا

١ – أوضح أي التراكيب الآتية يمثل قضية :

١ – إن الشكل ب حـ ء هـ معين .

٢ – هل الشكل ب حـ ء هـ معين ؟

٣ – إذا كان المستقيم ب حـ ماراً من النقطة م فهو المطلوب .

٤ – هلا رسمنا مستطيلا .

٥ – إن القمر كوكب سيار .

٦ – دمشق عاصمة الجمهورية العربية اليمنية .

٧ – $(٢^{٥})^{٣} = ٢^{١٥}$

٨ – أوجد ناتج ما يلي ٣ (س + ٥)

٩ – للمعادلة من الدرجة الثانية جذران .

١٠ – أوجد على الضلع حـ ء من المثلث ب حـ ء نقطة متساوية البعدين عن ضلعيه ب حـ و ب ء .

الحل :

إذا تذكرنا أن القضية هي الكلام الذي يمكن وصفه بالصدق أو بالكذب فاننا نستنتج بسهولة أن التراكيب ذات الأرقام (١ ، ٣ ،

٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩) تمثل قضايا ، بينما لا تمثل التراكيب (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٠ قضايا .

٣ – بيّن فيما إذا كانت القضايا الواردة أعلاه صحيحة أم خاطئة :

الحل :

استناداً الى المعلومات التي قبلنا صحتها نتيجة لدراستنا وخبرتنا العامة يمكننا أن نقرر ان القضيتين (٧ ، ٩) ، صحيحتان وان القضيتين (٥ ، ٦) خاطئتان ، أما القضيتان (١ ، ٣) فلا يمكننا ان نقرر شيئاً بحقهما ما لم يكن الشكل والمسألة المتعلقتين بهما واقعتين أمام أعيننا .

٣ – اكتب القضايا النافية للقضايا التالية :

١ – يقبل العدد ٧٠ القسمة على ١٤

٢ – يقبل العدد الزوجي القسمة على ٢

٣ – ١٧ قاسم مشترك للعددين ٥١ و ٩٢

٤ – إن المثلث الذي أطوال أضلاعه (٣ ، ٤ ، ٥) مثلث قائم

٥ – $(ب + حـ)^{٢} = ب^{٢} + ٢ ب حـ + حـ^{٢}$

٦ – منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة .

٧ – قطرا متوازي الأضلاع متناصفان .

الحل :

القضايا النافية للقضايا السابقة هي على الترتيب القضايا الآتية :

١ – لا يقبل العدد ٧٠ القسمة على ١٤

٢ – لا يقبل العدد الزوجي القسمة على ٢

٣ – ليس العدد ١٧ قاسماً مشتركاً للعددين ٥١ ، ٩٢

٤ – ليس المثلث الذي أطوال أضلاعه (٣ ، ٤ ، ٥) قائماً .

٥ – $(ب + ح)^{٢} \neq ب^{٢} + ٢ ب ح + ح^{٢}$

٦ – منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين لا ينصف القاعدة .

٧ – قطرا متوازي الأضلاع غير متناصفين .

تمرين : بين أنه إذا كانت قضية من القضايا الواردة في التمرين السابق صحيحة فإن نفيها سيكون خاطئاً وعلى العكس إذا كانت خاطئة فان نفيها سيكون صادقاً .

٤ – إذا كان مجال س ، متحول القضايا التالية ،هو مجموعة الأعداد الصحيحة ، عين القضايا الصادقة والقضايا الكاذبة من مجموعة القضايا التالية :

١ – ٣ س − ٩ = ٠

٢ – ٥ س − ٣ = ٠

٣ – ٢ س = $\sqrt{٢}$

٤ – $س^{٢} − ٥ س + ٦ = ٠$

٥ – $(س − ١)^{٢} = س^{٢} − ٢ س + ١$

٦ – $\frac{٢ س − ٤}{س − ٢} = ٢$ ، $س \neq ٢$

الحل :

نلاحظ بسهولة أن القضيتين (٥ ، ٦) صحيحتان دوماً وان القضيتين (٢ ، ٣) خاطئتان دوماً ، أما القضية (١) فهي صحيحة من أجل س = ٣ وخاطئة من أجل بقية الأعداد الصحيحة وكذلك فان القضية (٤) صحيحة من أجل القيمتين (٢ ، ٣) وخاطئة من أجل بقية القيم المأخوذة من مجموعة الأعداد الصحيحة .

٥ - برهن أن (ب ⇐ ~ حـ) ⇔ (حـ ⇐ ~ ب)

الحل :

يتحقق الفرض دوماً إلا في الحالة التي تتحقق فيها ب وتنتفي (~حـ) أي في الحالة (ب و حـ) أما المطلوب (حـ ⇐ ~ ب) فهو محقق دوماً إلا في الحالة التي تتحقق فيها حـ وتنتفي (~ ب) أي في الحالة (ب و حـ) وهذا ما يبرهن تكافؤ قضيتي الفرض والطلب أي :

(ب ⇐ ~ حـ) ⇔ (حـ ⇐ ~ ب)

ويمكننا أن نحل هذه المسألة بطريقة جدول الحقيقة :

ب	حـ	~ ب	~حـ	ب ⇐ ~ حـ	حـ ⇐ ~ ب
١	١	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	١	١	١
٠	١	١	٠	١	١
٠	٠	١	١	١	١

نملىء العمودين الأول والثاني كما فعلنا في دراسة قيم قضيتين مع بعضهما. أما العمود الثالث المتعلق بنفي القضية ب فهي مخالفة للقيم الموجودة في العمود الأول والقيم التي يحويها العمود الرابع مخالفة للقيم التي يحويها العمود الثاني . أما قيم العمود الخامس الذي يمثل قيم الإقتضاء فهي دوماً (١) إلا في الحالة ب و ~ (~ حـ) وكذلك الأمر من أجل قيم العمود الأخير فهي دوماً (١) إلا في الحالة حـ و ~ (~ ب) وبسبب تطابق قيم القضيتين (ب ⇐ ~ حـ) و (حـ ⇐ ~ ب) تقرر أن هاتين القضيتين متكافئتان .

٦ — اكتب القضايا المركبة التالية بأشكال رمزية مستعيناً بأدوات الربط وبالحروف ب ، حـ ، ... التي نرمز بها لقضايا بسيطة ثم اعط قيمة لكل من هذه القضايا :

١ — القمر سيارة وهو مصنوع من الحديد .

٢ — القمر سيارة وهو أصغر من الأرض .

٣ — القمر سيارة أو تابع للأرض .

٤ — القمر تابع للارض وهو أصغر منها .

٥ — العدد ٣٦ يقبل القسمة على العدد ٢ وعلى العدد ٣

٦ — العدد ٥ | ٢٥ أو ٥ | ٣١

٧ — $\sqrt{-٩} = ٣$ و $\sqrt{٩} = ٣$

٨ — $\sqrt{٣} = ١,٧$ أو $\sqrt{٣} = ١,٨$

٩ — $ب^{ن} : ب^{هـ} = ب^{ن-هـ}$ أو $ب^{ن} . ب^{هـ} = ب^{ن.هـ}$

١٠ — $ب^{٢} - حـ^{٢} = (ب + حـ)(ب - حـ)$

و $(ب + حـ)^{٢} = ب^{٢} + ٢ ب حـ + حـ^{٢}$

الحل :

اذا رمزنا بـ ب للقضية الاولى وبـ حـ للقضية الثانية الواردتين في كل واحدة من القضايا المركبة السابقة فانه يمكننا أن نكتب هذه التراكيب بالاشكال الرمزية التالية :

١ - ب ∧ ح ، ٢ - ب ∧ ح

٣ - ب ∨ ح ، ٤ - ب ∧ ح

٥ - ب ∧ ح ، ٦ - ب ∨ ح

٧ - ب ∧ ح ، ٨ - ب ∨ ح

٩ - ب ∨ ح ، ١٠ - ب ∧ ح

ويمكننا إستناداً إلى ما يقبله العلم في هذا العصر ، أن نقرر ان القضايا (١ ، ٢ ، ٧ ، ٨) خاطئة وأن القضايا (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ١٠) صحيحة.

٧ – اكتب القضايا النافية للقضايا المركبة الواردة في التمرين السابق :

الحل :

إذا عدنا إلى تعريف القضية المركبة بـ (و) والقضية المركبة بـ (أو) وتذكرنا متى تتحقق كل من هاتين القضيتين ومتى تنتفي فاننا نستطيع [illegible]

١ – [illegible]

٢ – [illegible]

٣ – [illegible]

٤ – [illegible]

٥ – إن العدد ٣٦ لا يقبل القسمة على ٢ أو لا يقبل القسمة على ٣

٦ – لا يقسم العدد ٥ العدد ٢٥ ولا العدد ٣١

٧ – $\sqrt{-٩} \neq ٣$ أو $\sqrt{٩} \neq ٣$

٨ – $\sqrt{٣} \neq ١,٧$ و $\sqrt{٣} \neq ١,٨$

٩ – $ب^{د}$: $ب^{هـ} \neq ب^{د-هـ}$ و $ب^{د} . ب^{هـ} \neq ب^{د.هـ}$

١٠ – ' $ب^{٢} - ح^{٢} \neq (ب + ح)(ب - ح)$

او $(ب + ح)^{٢} \neq ب^{٢} + ٢ ب ح + ح^{٢}$

٨ – اكتب القضيــة النافيــة لـ ب ∧ ح وبرهن صحـــة دستور « دو مورغان » الاول :

$$\sim (ب \wedge ح) \Leftrightarrow (\sim ب) \vee (\sim ح)$$

الحل :

تتحقق ب ∧ ح في الحالة الوحيدة التي يتحقق فيها كل من القضيتين ب ، ح وتنفي في الحالات الثلاث الباقية وهي :

١ – إذا تحققت ب وانتفت ح

٢ – إذا انتفت ب وتحققت ح

٣ – إذا انتفو، كل من ب و ح

ويمكننا أن نتأكد بسهولة أن هذه الحالات هي الحالات الوحيدة التي تتحقق فيها القضية :

$$(\sim ب) \vee (\sim ح)$$

يمكننا أن نبرهن دستور (دو مورغان) الأول الذي يمثل هذا التمرين بجدول الحقيقة التالي :

ب	ح	~ ب	~ ح	ب ∧ ح	~ (ب ∧ ح)	(~ ب) ∨ (~ ح)
١	١	٠	٠	١	٠	٠
١	٠	٠	١	٠	١	١
٠	١	١	٠	٠	١	١
٠	٠	١	١	٠		١

إن التطابق الظاهر في هذا الجدول بين قيم القضية ~ (ب ∧ حـ)
الموجودة في العمود السادس وقيم القضية (~ ب) ∨ (~ حـ) الموجودة
في العمود السابع يؤكد لنا التطابق بين هاتين القضيتين ويسمح لنا بأن
نكتب :

~ (ب ∧ حـ) ⇔ (~ ب) ∨ (~ حـ)

ملاحظة :

يبرهن بالطريقة السابقة نفسها دستور « دو مورغان » الثاني :

~ (ب ∨ حـ) ⇔ (~ ب) ∧ (~ حـ)

ثم يستنتج ما يلي :

قاعدة : لنفي قضية مركبة من قضيتين بواسطة أداة الربط (و) ننفي كلاً
من القضيتين ونستبدل بالأداة (و) الأداة (أو) والعكس بالعكس .

٩ – من أجل أي قضيتين ب ، حـ أثبت أنّ :

ب ∧ حـ ⇔ حـ ∧ ب

البرهان : بطريقة مماثلة لما رأينا في التمرين السابق وبالاعتماد على تعريف
(الربط بـ و) نشكل جدول الحقيقة التالي :

ب	حـ	ب ∧ حـ	حـ ∧ ب
١	١	١	١
١	٠	٠	٠
٠	١	٠	٠
٠	٠	٠	٠

وبملاحظة العمودين الأخيرين نجد أن القضيتين ب ∧ حـ و حـ ∧ ب
صحيحتان معاً أو خاطئتان معاً فهما متكافئتان .

١٠ – من أجل أي قضيتين ب ، ح أثبت أن :

ب ∨ ح ⟺ ح ∨ ب

البرهان : نشكل جدول الحقيقة التالي :

ب	ح	ب ∨ ح	ح ∨ ب
١	١	١	١
١	٠	١	١
٠	١	١	١
٠	٠	٠	٠

وقد سجلنا في العمودين الأول والثاني الحالات المختلفة لقيم القضيتين ب ، ح معاً. وسجلنا في العمودين الأخيرين قيم القضيتين ب ∨ ح ، ح ∨ ب المقابلة لكل حالة من حالات العمودين الأول والثاني وذلك اعتماداً على تعريف عملية الربط بـ (أو) . وبالتدقيق في العمودين الأخيرين نلاحظ أن [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

أ – ب و (ح ∨ ء) ، ٢ – (~ ب) و (ح ∨ ء)

٣ – ب و ~ (ح ∨ ء)

وبما ان القضية (ح ∨ ء) تتحقق في الحالات : (ح) و (ء) ، (~ ح) و (ء) ، (ح) و (~ ء) وتنتفي في الحالة الوحيدة (~ ح) و (~ ء) فإن القضية المركبة ب ∨ (ح ∨ ء) تتحقق في

الحالات التالية وفي هذه الحالات فقط :

١ – (ب) و (حـ) و (ى) ، ٢ – (ب) و (حـ) و (~ ى)

٣ – ب و (~ حـ) و (ى) ، ٤ – (~ ب) و (حـ) و (ى)

٥ – (~ ب) و (~ حـ) و (ى) ، ٦ – (~ ب) و (حـ) و (~ ى)

٧ – ب و (~ حـ) و (~ ى)

نستنتج بالطريقة ذاتها أن القضية (ب v حـ) v ى تتحقق في الحالات التالية وفي هذه الحالات فقط :

١ – (ب) و (حـ) و (ى) ، ٢ – (~ ب) و (حـ) و (ى)

٣ – (ب) و (~ حـ) و (ى) ، ٤ – (~ ب) و (~ حـ) و (ى)

٥ – (ب) و (حـ) و (~ ى) ، ٦ – (~ ب) و (حـ) و (~ ى)

٧ – (ب) و (~ حـ) و (~ ى)

يتضح المطلوب من تطابق الحالات السبع الأول مع الحالات السبع الأخيرة

يمكن حل هذا التمرين بواسطة جدول الحقيقة التالي :

ب	حـ	ى	ب v حـ	(ب v حـ) v ى	حـ v ى	ب v (حـ v ى)
١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	١	١	١
١	٠	١	١	١	١	١
٠	١	١	١	١	١	١
١	٠	٠	١	١	٠	١
٠	١	٠	١	١	١	١
٠	٠	١	٠	١	١	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

وبملاحظة العمودين الأخيرين من هذا الجدول نستنتج المطلوب .

١٢ – من أجل أي ثلاث قضايا ب ، حـ ، ى أثبت أن :

ب ∧ (حـ ∧ ى) ⇔ (ب ∧ حـ) ∧ ى

البرهان : بطريقة مماثلة لما رأيناه في التمارين السابقة وبالاعتماد على تعريف (الربط بـ و) نشكل جدول الحقيقة التالي :

ب	حـ	ى	ب ∧ حـ	(ب ∧ حـ) ∧ ى	(حـ ∧ ى)	ب ∧ (حـ ∧ ى)
١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	٠	٠	٠
١	٠	١	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	١	٠	٠	١	٠
٠	١	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

وبملاحظة العمودين الخامس والسابع نجد أن القضيتين ب ∧ (حـ ∧ ى) ، (ب ∧ حـ) ∧ ى صحيحتان معاً أو خاطئتان معاً فهما متكافئتان .

١٣ – إذا كانت ب ، حـ ، ى ثلاث قضايا بسيطة اكتب نفي كل من القضايا التالية :

١ – ب ∧ ~ حـ ، ٢ – ~ ب ∨ ~ حـ ، ٣ – ~ ب ⇐ حـ

٤ – ب ⇐ ~ حـ ، ٥ – (ب ∨ حـ) ∧ حـ

الحـــل :

استناداً إلى القاعدة المبينة في التمرين (٨) السابق يمكننا أن نكتب بالتدرج :

١ – ~ (ب ∧ ~ حـ) ⇔ ~ ب ∨ ~ (~ حـ) ⇔ ~ ب ∨ حـ

٢ - ~ ~ ب v ~ ح ⇔ ~ (~ ب) ∧ ~ (~ ح) ⇔ ب ∧ ح

٣ - بما ان الإقتضاء ينتفي في الحالة الوحيدة التي يتحقق فيها الفرض، وتنتفي النتيجة فانه يمكننا أن نكتب :

~ (~ ب ⇐ ح) ⇔ ~ ب ∧ ~ ح

٤ - بطريقة التمرين السابق يمكننا أن نكتب :

~ (ب ⇐ ~ ح) ⇔ ب ∧ ح

٥ - ~ [(ب v ح) ∧ ح] = ~ (ب v ح) v ~ ح
= (~ ب ∧ ~ ح) v ~ ح

ونجد بذلك تعميماً لدستوري « دو مورغان »

~ [(ب v ح) ∧ ح] ⇔ (~ ب ∧ ~ ح) v ~ ح

قاعدة : لنفي قضية مركبة من عدد من القضايا بالأداتين (∧) و (v) تنفي كل قضية داخلة في هذا التركيب وتستبدل بالأداة (∧) الأداة (v) وبالأداة (v) الأداة (∧) .

ويمكن اجراء الدراسة السابقة في جدول الحقيقة التالي :

ب	ح	ب v ح	(ب v ح) ∧ ح	~[(ب v ح) ∧ ح]	~ ب	~ ح	(~ب) ∧ (~ح)	[(~ب) ∧ (~ح)] v (~ح)
١	١	١	١	٠	٠	٠	٠	٠
١	٠	١	٠	١	٠	١	٠	١
٠	١	١	١	٠	١	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	١	١	١	١	١

إن التطابق بين قيم القضية ~ [(ب v ح) ∧ ح] وقيم القضية [(~ ب) ∧ (~ ح)] v (~ ح) الواقعتين في العمودين الخامس والتاسع يؤكد التطابق بين هاتين القضيتين .

تمارين غير محلولة

١٤ – عيّن فيما يلي التعابير التي تمثل قضايا . اذكر الصحيح منها والخاطىء :

١ – إن هذا المثلث متساوي الساقين ٢ – س^{٢} + ٣ س + ٢ = ٠

٣ – ٥ = ٣ + ٢ و ٧ = ٢ + ٦ ٤ – الثلج أبيض

٥ – يا بني قم وحضّر درسك ٦ – لا تكذب

٧ – زوايا المربع حادة . ٨ – ١ > ٣

٩ – $\frac{٣}{٥}$ عدد عادي . ١٠ – ٧ > $\frac{٣}{٥}$.

١١ – القاهرة عاصمة لبنان . ١٢ – بغداد تقع على نهر دجلة

١٥ – انظر في كل قضية من قضايا العمود الثاني وبين فيما اذا كانت نافية للقضية المقابلة لها من العمود الأول :

١ – كل الطلاب مجدون ، كل الطلاب غير مجدين

٢ – كل زاوية في المثلث تساوي ٦٠° ، كل زاوية في المثلث لا تساوي ٦٠°

٣ – كل السيارات تدور حول الشمس ، كل السيارات لا تدور حول الشمس

٤ – المثلث ب حـ ى قائم الزاوية ، ليس المثلث ب حـ ى بقائم الزاوية

٥ – الزاويتان ب ، حـ متساويتان ، الزاويتان ب ، حـ غير متساويتين

٦ – يقبل س القسمة على (٢) او (٣) ، لا يقبل س القسمة على (٢) ولا على (٣)

٧ – يقسم ب كلا من حـ و ى ، ب لا يقسم حـ ولا يقسم ى

١٦ – اكتب القضايا النافية للقضايا التالية :

١ – ٧ عدد أولي
٢ – ١٦ مربع تام

٣ – المستقيمان ل ، لَ متوازيان
٤ – قطرا المربع متساويان ومتناصفان

٥ – الارتفاع في المثلث المتساوي الساقين ينصف زاوية الرأس وينصف القاعدة .

٦ – إن المثلث ب حـ ء قائم الزاوية أو متساوي الساقين .

٧ – (ب و حـ) أو (ء)
٨ – (ب او حـ) و (ء)

٩ – (ب ⇐ حـ) و (ء)
١٠ – (ب ⇐ حـ) او (ء)

١٧ – عيّن قيمة كل من القضايا التالية :

١ – س = ١ ⇔ س = – ١ .

٢ – س > ٠ ⇐ س > ٣ .

٣ – ٣ س = ٧ ⇐ ٣ س + ٢ = ٩

٤ – س – ٣ = ٠ ⇐ س^{٢} – ٩ = ٠

٥ – س = ٥ ⇔ (س – ٥) (س – ٣) = ٠ .

٦ – س^{٢} = ١ ⇔ س = ١ .

٧ – س^{٢} – ١ = ٠ ⇔ (س = ١) ∨ (س = – ١)

٨ – ٣ س = ٩ ⇔ ٣ س + ٢ = ١١

١٨ – برهن أن القضايا الآتية صحيحة دوماً :

١ – (ب ⇐ حـ) ⇔ [(~ ب) ∨ حـ]

٢ – ب ∨ ~ ب

٣ – [ب ∧ (ب ⇐ حـ)] ⇐ حـ

٤ – ~ (ب ∧ ~ ب)

٥ – ~ (ب ⇐ حـ) ⇔ ب ∧ ~ حـ

٦ – (ب ⇐ حـ) ∧ (~ حـ) ⇐ (~ ب)

٧ – [ب ⇐ (حـ ⇐ ء)] ⇐ [(ب ∧ حـ) ⇐ ء]

٨ – ب ∧ (~ ب ∨ حـ) ⇐ ب ∨ حـ

٩ – ب ⇔ ~ (~ ب)

١٠ – ~ (~ ب ∧ ~ حـ) ⇔ ب ∨ حـ

١١ – ~ (~ ب ∨ ~ حـ) ⇔ ب ∧ حـ

١٢ – [(ب ∧ حـ) ⇐ ء] ⇐ [ب ⇐ (حـ ⇐ ء)]

١٣ – ~ (ب ⇔ حـ) ⇔ (ب ⇔ ~ حـ)

١٤ – [ب ⇐ (حـ ∧ ء)] ⇔ [(ب ⇐ حـ) ∧ (حـ ⇐ ء)]

أجوبة وارشادات

١٤ – (٥ ، ٦) ليستا قضيتين ، (٤ ، ٨ ، ٩ ، ١٢) قضايا صحيحة ، (٣ ، ٧ ، ١٠ ، ١١) قضايا خاطئة ، (١) قضية لا نعرف صحتها من خطأها إلا اذا عرفنا المثلث ، (٢) قضية صادقة من أجل س = – ١ و س – ٢ وكاذبة فيما عدا ذلك .

١٥ – (١ ، ٢ ، ٣ ، ٧) لا ، (٤ ، ٥ ، ٦) نعم .

١٦ – ١ – ٧ ليس بعدد اولي

٢ – ١٦ ليس مربعاً تاماً

٣ – ل ، لَ غير متوازيين

٤ – قطرا المربع غير متساويين أو غير متناصفين

٥ – الإرتفاع في المثلث المتساوي الساقين لا ينصف القاعدة أو لا ينصف زاوية الرأس .

٦ – المثلث ب حـ ى غير قائم الزاوية ولا متساوي الساقين .

٧ – (~ ب أو ~ ى) و (~ ى)

٨ – (~ ب و ~ حـ) أو (~ ى)

٩ – (ب ⇐ ~ حـ) أو (~ ى)

١٠ – (ب ⇐ ~ حـ) و (~ ى)

١٧–١–(٠) ، ٢ – (٠) ، ٣ – (١) ، ٤ – (١)
٥ – (٠) ، ٦ – (٠) لأنه يمكن كتابة هذه القضية بالشكل
(س = ١ أو س = – ١) ⇔ س = ١ ، ٧ – (١) ، ٨ – (١)

١٨ – ١ – استعمل جدول الحقيقة ٠ ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٤ :
استفد من (١)

الفصل الثاني

المجموعات

١٠ – مفهوم المجموعة :

يعتبر هذا المفهوم من المفاهيم الرئيسية في الرياضيات المعاصرة وهو من البساطة بحيث يمكن إدراكه بسهولة من خلال كثير من المواقف التي يصادفها كل منا في حياته اليومية فعند الحديث مثلاً عن : فرقة جنود، فوج كشفي ، رتل من السيارات ، حزمة من الأقلام ، طاقة من الأزهار، مجموعة الأشياء التي تحويها محفظتك (قلم ، كتاب ، دفتر ، ممحاة ، مسطرة، مبراة) ، مجموعة نقاط مستقيم ، ندرك في كل موقف من هذه المواقف أننا أمام شيء مكوّن من عدة أفراد وقد اصطلح علمياً على تسمية هذا الشيء مجموعة (Ensemble , Set) فنقول :

مجموعة جنود ، مجموعة كشافين ، مجموعة سيارات ...

ويعد العالم الألماني كانتور Cantor (١٨٤٥ م – ١٩١٨ م) أول من اعتبر المجموعة مفهوماً أساسياً يتصف بما يلي :

١ – المجموعة كائن رياضي قائم بذاته ، مفهومه يختلف عن مفهوم الأفراد التي تكونه فالحديث مثلاً عن طاقة من الزهر (ولو كانت مؤلفة من زهرة واحدة) يختلف عن حديثنا عن الزهرة الواحدة .

٢ – أفراد المجموعة متمايزة ، أي أنه لا داعي لتكرار أي فرد من

أفرادها فمجموعة أرقام العدد ٣٨٦٣٥ هي ٥ ، ٣ ، ٦ ، ٨ ولم يذكر الرقم ٣ سوى مرّة واحدة رغم ظهوره مرّتين في العدد المذكور .

٣ – المجموعة معينة تعييناً تاما بحيث يمكننا أن نقول عن أي شيء إنه فرد من المجموعة أو غريب عنها فقولنا بجموعة الشجعان في بلد ما لا يمثل بجموعة رياضية لأن وصف فرد بالشجاعة يختلف من شخص لآخر. في حين أن قولنا بجموعة الدول الأعضاء في هيئة الأمم المتحدة هي مجموعة رياضية معينة تماماً لأننا نستطيع بعد الرجوع الى سجلات هذه الهيئة أن نقرر فيما إذا كانت دولة ما هي فرد من هذه المجموعة أو ليست فرداً منها .

٤ – ليس للترتيب الذي تورد فيه أفراد المجموعة أي أثر عليها ، فمجموعة الحروف التي تدخل في كلمة عربي هي ب ، ر ، ع ، ي مرتبة بهذا الشكل أو بأي ترتيب آخر

١١ – عناصر المجموعة :

لقد [illegible] (Elements) [illegible] .

مثال (١) : [illegible]

مثال (٢) : [illegible]

مثال (٣) : عناصر [illegible] هي :

ﻫ ، ب ، . ، ى ، ﻫ ، ط

وسنرمز في غالب الأحيان للمجموعات بحروف كبيرة مثل : س ، ع ، ص ، ج ...

ولعناصر مجموعة بحروف صغيرة مثل : ﻫ ، ب ، ح ، ... ، س ، ع ، ص ، ..

وسنستخدم الحروف الصغيرة رموزاً للمجموعات عند الضرورة وعدم الالتباس .

١٢ – طرق تعيين مجموعة :

١ – تتعين مجموعة إذا عرفت جميع عناصرها ، ويمكننا عندئذ كتابة المجموعة **بذكر جميع عناصرها** بين حاضنتين من الشكل { } مع وضع فاصلة بين كل عنصرين فإذا رمزنا لمجموعة حروف كلمة (انسان) مثلاً بـ سـ فاننا نكتب :

سـ = { ﺃ ، ن ، س }

٢ – تتعين المجموعة أيضاً **بذكر خاصة** يمكننا بواسطتها الحكم على أي شيء بأنه عنصر في هذه المجموعة أو إنه غريب عنها ، وفي هذه الحالة نرمز لعنصر كيفي من عناصر المجموعة برمز مثل ع الذي نسميه متحولاً (Variable) في المجموعة ونعبر عن المجموعة بذكر الخاصة التي **يتمتع بها المتحول** ع أي الخاصة المميزة التي تتمتع بها جميع عناصر المجموعة المذكورة . فالمجموعة سـ السابقة الذكر تكتب بالشكل :

سـ = { ع : ع حرف من حروف كلمة انسان }

ونقرأ ذلك بقولنا : « سـ هي مجموعة العناصر ع حيث ع حرف من حروف كلمة انسان » وقد استخدمنا الرمز (:) عوضاً عن كلمة (حيث) .

والجدير بالذكر أنه بامكاننا ، في هذه الطريقة ، استخدام رمز آخر غير ع مثل س أو ص ... أو ★ ، ☐ ... ونكتب :

سـ = { ★ : ★ حرف من حروف كلمة انسان }

مثال (١) : إذا فرضنا سـ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي تصغر العدد ٦ ، فيمكننا أن نكتب :

سـ = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥ }

أو سـ = { ن : ن عدد صحيح موجب < ٦ }

مثال (٢) : اذا كانت ع مجموعة الأشخاص الذين يتكلمون اللغة العربية فمن الممكن – ولو نظرياً – معرفة جميع عناصر المجموعة ولكنه من الصعب تعيين ع بذكر جميع هذه العناصر ولذا فاننا نكتب في هذه الحالة :

ع = { س : س يتكلم العربية } .

١٣ – المجموعات العددية :

إن أكثر المجموعات تداولاً في الدراسات الرياضية هي المجموعات العددية ، وسنذكر الآن بعضاً منها ونقدم ما تبقى منها في الأماكن المناسبة:

١ – مجموعة الأعداد الطبيعية :

ط = { ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ... }

٢ – مجموعة الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر :

ط* = { ١، ٢، ٣، ٤، ... }

٣ – مجموعة الأعداد الصحيحة :

صـ = { ...، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ... }

٤ – مجموعة الأعداد الصحيحة المغايرة للصفر :

صـ* = { ...، -٣، -٢، -١، ١، ٢، ٣، ... }

٥ – مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والصفر :

صـ$^+$ = { ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ... }

٦ – مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة والصفر :

صـ$^-$ = { ..، -٣، -٢، -١، ٠ }

٧ – مجموعة الأعداد العادية وهي المجموعة :

ع = { س : س = $\frac{ب}{حـ}$ ، ب ∈ ص ، حـ ∈ ص* }

٨ – مجموعة الأعداد العادية المغايرة للصفر ونرمز لها بـ ع*

٩ – مجموعة الأعداد العادية الموجبة والصفر ونرمز لها بـ ع+

١٠ – مجموعة الأعداد العادية السالبة والصفر ونرمز لها بـ ع-

١١ – مجموعة الأعداد الحقيقية ونرمز لها بـ ح وتتكون من جميع الأعداد العادية وغير العادية مثل : $\sqrt{٣}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، π ، طل ١٥ ،

١٢ – مجموعة الأعداد الحقيقية المغايرة للصفر ونرمز لها بـ ح*

١٣ – مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة والصفر ونرمز لها بـ ح+

١٤ – مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة والصفر ونرمز لها بـ ح-

يتمتع مجموعة الأعداد الحقيقية ح بخاصة هامة هي أنه إذا أخذنا محوراً موجهاً ... الشكل (١) أمكن تمثيل عناصر ح بنقاط



الشكل (١)

هذا المحور ، بمعنى أن كل عدد حقيقي س تقابله نقطة ى فصلها ذلك العدد ، وكل نقطة ط من المحور يقابلها عدد حقيقي ع هو فصل هذه النقطة . ولذا فان هذا المحور يسمى **المحور الحقيقي** أو **المستقيم الحقيقي**. الخاصة تنفرد بها مجموعة الاعداد الحقيقية لأن كل عنصر من عناصر بقية المجموعات العددية يُمَثَّل بنقطة من محور موجه ولكن ليس

ضرورياً أن تقابل كل نقطة من المحور عنصراً من تلك المجموعات .

١٤ – **مفهوم الانتماء :**

إذا كان ب عنصراً من المجموعة سـ فاننا نقول إن ب ينتمي إلى سـ ونكتب ذلك بالشكل ب ∋ سـ ونقرأ ذلك بقولنا « ب ينتمي الى سـ » وإذا أردنا نفي انتماء ب إلى المجموعة سـ كتبنا :

ب ∌ سـ

ونقرأ ذلك بقولنا « ب لا ينتمي إلى سـ » .

إذا رمزنا بـ ح للخاصة المميزة للمجموعة سـ فان قولنا « ب ∋ سـ » يكافىء قولنا « إن ح محققة من أجل ب » وقولنا « ب ∌ سـ » يكافىء قولنا « إن ح غير محققة من أجل ب » أو بشكل رمزي :

ب ∋ سـ ⟺ ح (ب) ، ب ∌ سـ ⟺ ~ ح (ب)

أمثلة :

١ – إذا كانت سـ = { س : عدد طبيعي زوجي } فان

٨ ∋ سـ و – ٤ ∌ سـ

٢ – إذا كانت سـ محيط المستطيل أ ب حـ ى و م مركز هذا المستطيل فان

أ ∋ سـ و م ∌ سـ

٣ – اذا علمنا أن صـ مجموعة الأعداد الصحيحة وأن صـ+ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والصفر وأن صـ- مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة والصفر فانه يكون :

$$٣ \ni صـ^+ ، ٠ \ni صـ^- ، \frac{٣}{٥} \notin صـ ، -٥ \notin صـ^+ ، \sqrt{٣} \notin صـ$$

١٥ــ المجموعة الخالية: (Ensemble Vide , Empty Set)

إذا عيّنا مجموعة بخاصة مميزة ووجدنا أنه لا يوجد أي عنصر يتمتع بهذه الخاصة فاننا نقول إن هذه المجموعة خالية ونعطيها الرمز ∅ أو الرمز { } .

أمثلة :

١ ــ إن مجموعة الأعداد الطبيعية التي تكبر العدد ٢ وتصغر العدد ٣ هي مجموعة خالية لأنه لا يوجد بين العددين ٢ ، ٣ أي عدد طبيعي أي:

∅ = { س : س ∋ ط و ٢ < س < ٣ }

٢ ــ إذا قمنا باحصاء على سكان مدينة دمشق ووجدنا أنه لا يوجد أي فرد منهم يزيد عمره على ١٢٠ سنة قلنا إن الأفراد الذين يسكنون دمشق والذين يزيد عمرهم على ١٢٠ سنة يؤلفون مجموعة خالية :

{ } = { س : س من دمشق ويزيد عمره على ١٢٠ سنة }

٣ ــ ∅ = { س : س ∋ ط ، س + ٣ = ٠ }

١٦ــ المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية :

إن للمجموعة : سـ { أ ، ب ، حـ ، ى } عناصر أربعة في حين أن مجموعة الأعداد الطبيعية :

ط = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... }

لا يمكن الإنتهاء من عدّ عناصرها .

نسمي كل مجموعة يمكن الانتهاء من عدّ عناصرها (ولو نظرياً) مجموعة منتهية (Ensemble fini , Finite Set) وهي المجموعة التي عدد عناصرها محدود ونقول في الحالة المخالفة إننا أمام مجموعة غير منتهية (Ensemble infini , Infinite Set) .

أمثـلة :

١ – مجموعة الأعداد الطبيعية التي تصغر العدد ٢٠ مجموعة منتهية .

٢ – مجموعة سكان الكرة الأرضية مجموعة منتهية .

٣ – مجموعة رمال بادية الشام مجموعة منتهية .

٤ – مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية غير منتهية .

٥ – مجموعة نقاط قطعة مستقيمة مجموعة غير منتهية .

تسمى المجموعـة المنتهية المكونـة من عنصر واحد **وحيدة العنصر** كالمجموعات :

{ ٣ } ، { ٥ } ، { حـ } ، { محمود } ، { دار }

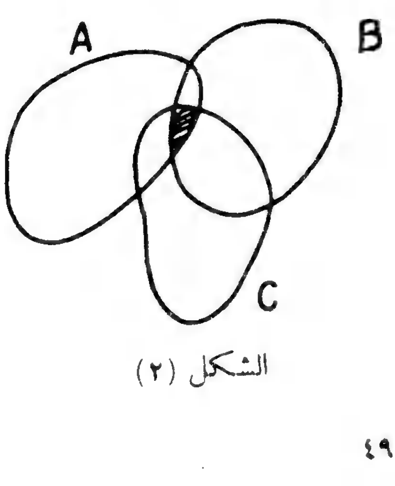
ومن المهم أن نميز بين الرمزين س و { س } فالأول يمثل عنصراً والثاني يمثل مجموعة وحيدة العنصر ويكون س ∌ { س }

ونسمي المجموعة المنتهية المكونة من عنصرين اثنين زوجاً (Paire – Pair)

كالأزواج { ١ ، ٢ } ، { أ ، ب } ، { مكة ، الحجاز } ، { دمشق ، سوريا }

١٧ – مخططات فين (Venn) :

وضع جون فين المخطط شكل (٢) عام ١٨٨٠ وفيه استبدل مجموعة أشياء بمناطق من مستوي ، فالمنحني A يمثل (الناس الفرنسيين) ، والمنحني B يمثل (الناس الجنرالات) ، والمنحني C يمثل (الناس الذين يحملون ميداليات) . ويمكننا بسهولة أن نقرأ بواسطة هذا المخطط العلاقات بين هذه المجموعات

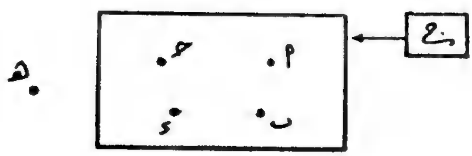


الشكل (٢)

من الناس ، فالمنطقة السوداء مثلاً تمثل الجنرالات الفرنسيين الذين يحملون ميداليات .

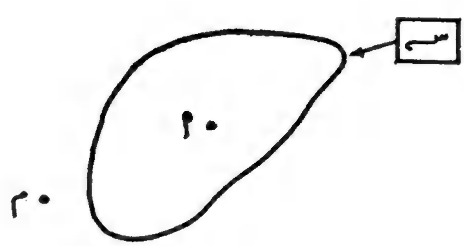
ويستفاد من طريقة فين في إيضاح كثير من قضايا نظرية المجموعات، وعندئذ تمثل المجموعة بمنطقة محاطة بخط مغلق بسيط كمربع أو مستطيل أو دائرة أو أي خط مغلق آخر لا يتقاطع مع نفسه ويسمى الشكل الذي يمثل المجموعة بهذه الطريقة **مخطط فين** .

مثال (١) : المجموعة ج = { ا ، ب ، حـ ، ء } يمثلها مخطط فين الشكل (٣) . وتُمَثَّل عناصر المجموعة بنقاط داخل المخطط وتمثل العناصر التي لا تنتمي الى ج كالعنصر هـ بنقاط خارج المخطط .



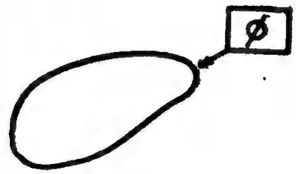
الشكل (٣)

مثال (٢) : المجموعة س = { س : س نقطة من محيط دائرة مركزها م } يمثلها هي والمركز مخطط فين الشكل (٤) . وأي نقطة داخل المخطط كالنقطة ا تمثل نقطة من محيط الدائرة .

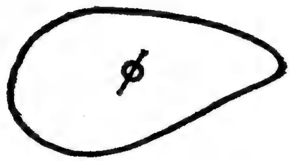


الشكل (٤)

مثال (٣) : المجموعة الخالية ∅ نمثلها بمخطط فين كما في الشكل (٥) أو كما في الشكل (٦) . وفي كلتا الحالتين **لا تمثل النقاط الداخلية في المخطط أي عنصر .**



الشكل (٥)



الشكل (٦)

ملاحظة :

عندما نمثل مجموعة منتهية بمخطط فين ونمثل على هذا المخطط جميع عناصر المجموعة بنقاط داخلية كما في المثال (١) . فإن مخطط فين في هذه الحالة هو في الحقيقة النقاط التي تمثل عناصر المجموعة والخط الذي يحيط بهذه النقاط يشير إلى أن هذه النقاط تمثل مجموعة واحدة . أما بقية النقاط الداخلية في المخطط فلا تلعب في هذه الحالة أي دور .

وعندما نمثل مجموعة غير منتهية بمخطط فين كما في المثال (٢) فنستطيع عند اللزوم أن نعتبر إحدى النقاط الداخلية ممثلة لأحد عناصر المجموعة . وكل نقطة داخلية أخرى تصلح لتمثيل عنصر آخر من عناصر المجموعة وهكذا ...

١٨ – جماعة مجموعات :

عند الحديث عن مجموعة إدارات الدولة مثلاً ، يلاحظ أن عناصر هذه المجموعة هي مجموعات أيضاً ، فكل عنصر هو إدارة تتكون من مجموعة من الموظفين .

وهناك حالات كثيرة تكون فيها عناصر المجموعة مجموعات أيضاً وتسمى مثل هذه المجموعة **مجموعة مجموعات** . ورغبة في عدم تكرار

كلمة مجموعة سنسمي مثل هذه المجموعة جماعة مجموعات

(Famille des ensembles, Family of sets)

مثال (١) : مجموعة مستقيمات في الفراغ هي جماعة مجموعات ، حيث كل عنصر في هذه الجماعة هو مستقيم وهو بدوره مجموعة نقاط .

مثال (٢) : مجموعة دوائر في مستوٍ هي جماعة مجموعات ، حيث كل عنصر في هذه الجماعة هو دائرة والدائرة بدورها هي مجموعة نقاط .

مثال (٣) : المجموعة { {١ ، ٢} ، {٣} ، ∅ } هي جماعة مجموعات لأن كل عنصر فيها هو مجموعة .

مثال (٤) : المجموعة { ٢ ، {٣ ، ب} ، {٤} ، ٦ } ليست جماعة مجموعات لأن عناصرها هي أعداد ومجموعات .

مثال (٥) : إذا كانت سـ = {هـ ، {أ ، ب} ، {حـ ، ء} ، ∅ } جماعة مجموعات فإن هـ تكون رمزاً لمجموعة .

١٩ – تساوي مجموعتين :

لتكن سـ مجموعة أرقام العدد ٣٣٥٦٥ و ع مجموعة أرقام العدد **٦٥٣٦٢** أي أن :

سـ = { ٥ ، ٦ ، ٣ }

ع = { ٣ ، ٦ ، ٥ }

يلاحظ أن للمجموعتين سـ ، ع العناصر نفسها أي أنهما يمثلان المجموعة ذاتها . يقـال عن هاتين المجموعتين إنهما **متساويتان** ويكتب باستخدام علامة التساوي = : سـ = ع ونقرأ ذلك (سـ تساوي ع) .

وبصورة عامة :

> **تعريف** : تكون مجموعتان سـ و ع متساويتين اذا كان لهما العناصر نفسها أي أن :
>
> (سـ = ع) $\Leftrightarrow$ (للمجموعتين سـ و ع العناصر نفسها)

ويمكن تعريف تساوي مجموعتين باستخدام مفهوم الانتماء كما يلي :

> **تعريف** : تكون مجموعتان سـ و ع متساويتين اذا كان كل عنصر من سـ ينتمي إلى ع وكان كل عنصر من ع ينتمي إلى سـ أي أن :
>
> (سـ = ع) $\Leftrightarrow$ (س $\in$ سـ $\Leftrightarrow$ س $\in$ ع)

وتكون مجموعتان سـ و ع **غير متساويتين** إذا وجد في احدى المجموعتين عنصر واحد على الأقل لا ينتمي الى المجموعة الأخرى ونكتب عندئذ :

سـ $\neq$ ع

ونقرأ ذلك (سـ لا تساوي ع) .

مثال (١) : إذا كانت سـ مجموعة حروف كلمة (مُعْجَم) و ع مجموعة حروف كلمة (جَمَعَ) فان سـ = ع لأن :

سـ = {م ، ع ، ج}

و ع = {ج ، م ، ع}

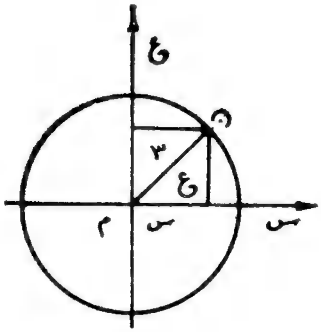
وواضح أن للمجموعتين العناصر نفسها .

مثال (٢) : المجموعتان :

سـ = { د : د نقطة من مستوي المحورين الاحداثيين تبعد عن مبدأ الاحداثيات م بعداً قدره ٣ سم }

ع = { هـ : هـ نقطة من مستوي المحورين الاحداثيين يحقق احداثياها العلاقة س^{٢} + ع^{٢} = ٩ }

متساويتان وكل منهماهو مجموعة نقاط محيط الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها ٣ سم الشكل (٧) .



الشكل (٧)

مثال (٣) : المجموعتان :

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ع = { ٢ ، ٦ ، ٣ }

غير متساويتين لأن ٤ ∈ س و ٤ ∉ ع

مثال (٤) : المجموعتان :

س = { أ ، ب ، جـ ، د }   ع = { ب ، د ، جـ ، هـ }

غير متساويتين لأن أ ∈ س و أ ∉ ع

أو لأن هـ ∈ ع و هـ ∉ س

٢٠ – نتيجة : المجموعة الخالية ∅ وحيدة .

في الحقيقة ، لنفرض أن هناك مجموعة خالية أخرى « خ » فاذا كان

$$\emptyset \neq \text{خ}$$

فمعنى ذلك وجود عنصر على الأقل في ∅ أو خ غير موجود في المجموعة الأخرى ، وهذا مخالف لافتراض كون ∅ و خ خاليتين . وعليه فان :

$$\emptyset = \text{خ}$$

٢١ – المجموعة الجزئية والاحتواء :

إذا كانت سـ مجموعة الكتب في مكتبة عامة و ع مجموعة الكتب المخطوطة في هذه المكتبة . فمن الواضح أن كل عنصر من ع هو عنصر من سـ ، أي أن جميع عناصر المجموعة ع ليست سوى بعض عناصر المجموعة سـ ، تسمى المجموعـة ع **مجموعة جزئية**[١] أو **شعبة** من من المجموعة سـ . ويقال إن المجموعة ع **محتواة**[٢] في المجموعة سـ أو إن المجموعة سـ حاوية المجموعة ع ومنه :

> **تعريف** : نقول عن مجموعة ع إنها محتواة في مجموعة سـ إذا كان كل عنصر من ع عنصراً من سـ أي أن :
>
> (ع محتواة في سـ) ⟺ (∀ س ∈ ع ⟸ س ∈ سـ)

وبناء على هذا التعريف نلاحظ أنه إذا كانت المجموعتان سـ و ع متساويتين أي أنه إذا كان سـ = ع . فان :

سـ تكون محتواة في ع ، لأن كل عنصر من سـ هو عنصر من ع كما أن ع تكون محتواة في سـ ، لان كل عنصر من ع هو عنصر من سـ .

وعندما تكون ع محتواة في سـ نستخدم الرمز ⊆

ونكتب : ع ⊆ سـ

ونقرأ : (ع محتواة في سـ) أو (ع مجموعة جزئية من سـ)

أو (ع جزء من سـ) أو (ع شعبة من سـ)

---

(١) (Sous - ensemble , Sub - Set)

(٢) (Inclus , Contained)

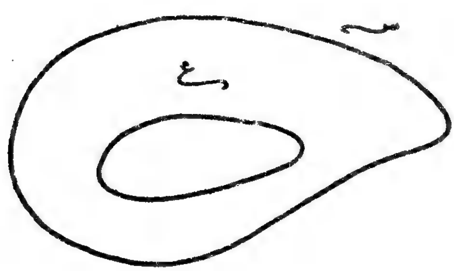
ويمكننا أن نكتب أيضاً سـ ⊆ ع

ونقرأ (سـ تحتوي ع)

ويمكننا كتابة تعريف المجموعة الجزئية باستخدام الرموز كما يلي :

> **تعريف :**
>
> (ع ⊇ سـ) ⇔ (∀ س ∈ ع ⇒ س ∈ سـ)

ويمكن تمثيل كون ع جزءاً من سـ باستخدام مخططات فين بالشكل (٨) .



الشكل (٨)

٢٢ – الاحتواء بالمعنى الواسع والاحتواء بالمعني الدقيق :

رأينا انه اذا كان كل عنصر من مجموعة سـ هو عنصر من مجموعة أخرى ع فاننا نقول إن سـ محتواة في ع ونكتب :

سـ ⊇ ع

واستناداً إلى هذا التعريف نستطيع القول إن أية مجموعة سـ محتواة في نفسها :

سـ ⊇ سـ

وإن المجموعة الفارغة محتواة في أية مجموعة س :

$$\varnothing \subseteq \text{س}$$

ولكن إذا نظرنا في المجموعتين :

$$\text{ع} = \{\text{أ، ب، ح، ء}\} \quad ، \quad \text{س} = \{\text{أ، ح، ب}\}$$

فاننا نلاحظ أن س محتواة في ع ، وأن ع لا تساوي س بالوقت نفسه ، أي أن :

$$\text{س} \subseteq \text{ع} \quad \text{و} \quad \text{ع} \neq \text{س}$$

نقول في هذه الحالة والحالات المماثلة إن س **محتواة تماماً في** ع أو إن س **محتواة في** ع **احتواء حقيقياً** أو إن س **محتواة في** ع **بالمعنى الدقيق** ويقال أيضاً إن س **مجموعة جزئية (شعبة) حقيقية** من ع أو إن س جزء حقيقي من ع ونكتب في هذه الحالة :

$$\text{س} \subset \text{ع}$$

مستخدمين الرمز $\subset$ (رمز الاحتواء بالمعنى الدقيق) عوضاً عن الرمز $\subseteq$ الذي نسميه (رمز الاحتواء بالمعنى الواسع) .

وهكذا نرى أنه لا يمكننا استعمال الرمز س $\subset$ ع ما لم نتأكد من أمرين : (١) كل عنصر من س هو عنصر من ع . (٢) يوجد في ع عنصر واحد على الأقل لا ينتمي لـ س .

وفي ضوء ما سبق نرى انه إذا كانت لدينا المجموعتان :

$$\text{س} = \{\text{أ، ب}\} \quad ، \quad \text{ع} = \{\text{ب، أ}\}$$

فيمكننا أن نكتب : $\text{س} \subseteq \text{ع}$ و $\text{ع} \subseteq \text{س}$ ولكننا لا نستطيع أن نكتب : $\text{س} \subset \text{ع}$ و $\text{ع} \subset \text{س}$

واذا كانت لدينا المجموعتان :

$$\text{ص} = \{\text{أ، ب}\} \quad ، \quad \text{ف} = \{\text{أ، خ، ب}\}$$

فاننا نلاحظ أن $صـ \neq ف$ و $ص \subseteq ف$ ولذلك يكون :

$$ص \subset ف$$

مثال (١) : اذا كانت سـ مجموعه مدن فلسطين و ع مجموعة المدن العربية فان $سـ \subseteq ع$ و $سـ \neq ع$ ولذا يكون :

$$سـ \subset ع$$

مثال (٢) : إذا كانت ﻫ مجموعة جميع المثلثات في مستو وكانت ب مجموعة المثلثات القائمة في هذا المستوي فان $ب \subseteq ﻫ$ و $ب \neq ﻫ$ ولذا يكون :

$$ب \subset ﻫ$$

٢٣ **–نفي الاحتواء**: إذا كانت لدينا مجموعتان سـ و ع وكان في ع عنصر واحد على الأقل لا ينتمي إلى سـ فان ع لا تكون محتواة في سـ ونكتب في هذه الحالة $ع \not\subseteq سـ$ وننفي الاحتواء بالشكل التالي :

$$(ع \not\subseteq سـ) \Leftrightarrow (\exists\ س \in ع \ و\ س \notin سـ)$$

مثال (١) : إذا كانت $ﻫ = \{٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$

$$ب = \{٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧\}$$

فان $ب \not\subseteq ﻫ$ لأن $(٦ \in ب$ و $٦ \notin ﻫ)$ أو لأن $(٧ \in ب$ و $٧ \notin ﻫ)$

وكذلك $ﻫ \not\subseteq ب$ لأن $٢ \in ﻫ$ و $٢ \notin ب$

مثال (٢) : إن مجموعة الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر جزء من مجموعة الأعداد الطبيعية أي أن :

$$ط^* \subset ط$$

في حين أن $ط \not\subseteq ط^*$ لأن $٠ \in ط$ و $٠ \notin ط^*$.

ومن أهم تطبيقات هذه الفقرة استخدامها في إثبات أن :

٢٤- المجموعة الخالية ∅ مجموعة جزئية من أية مجموعة سـ :

أي أن : ∅ ⊆ سـ

في الحقيقة ، إذا لم تكن ∅ محتواة في سـ فهناك إذن عنصر واحد على الأقل ينتمي إلى ∅ ولا ينتمي إلى سـ وذلك حسب الفقرة السابقة . وهذا غير ممكن لأن ∅ هي الخالية فرضاً ولا ينتمي اليها أي عنصر .

٢٥- الاحتواء وتساوي المجموعات :

رأينا في الفقرة ٢١ أنه إذا كانت لدينا مجموعتان سـ و ع متساويتان فان سـ ⊆ ع و ع ⊆ سـ

وبالعكس إذا كانت لدينا مجموعتان سـ و ع وكانت جميع عناصر سـ تنتمي إلى ع أي كان سـ ⊆ ع وكانت أيضاً جميع عناصر ع تنتمي إلى سـ أي كان ع ⊆ سـ كان للمجموعتين العناصر ذاتها وبالتالي فان سـ = ع .

ونستنتج مما تقدم صيغة جديـدة لتعريف تساوي مجموعتين نستخدم مفهوم الاحتواء وهي :



تعريف : تتساوى مجموعتان سـ و ع إذا كانت سـ محتواة في ع وكانت ع محتواة في سـ أي أن :   (سـ = ع) ⟺ (سـ ⊆ ع و ع ⊆ سـ)

ويستخدم هـذا التعريف كثيراً لإثبـات تساوي المجموعات (انظر التمرين ٣٥ من التمارين المحلولة) .

ملاحظة :

للتحقق من تساوي مجموعتين باستخدام مخططات فين يكفي أن نبين أن المجموعتين تمثلها المنطقة نفسها من المخطط .

٢٦- مجموعة أجزاء مجموعة :

لتكن لدينا المجموعة سـ = { أ ، ب ، حـ } ولتعيين جميع مجموعاتها الجزئية نلاحظ ما يلي :

١ – من المعلوم أن ∅ ⊆ سـ وأن سـ ⊆ سـ
أي أنه ∅ و سـ هما مجموعتان جزئيتان من سـ

٢ – المجموعات الجزئية الوحيدة العنصر هي : {أ} ، {ب} ، {حـ}

٣ – المجموعات الجزئية التي يتكون كل منها من عنصرين هي :
{أ ، ب} ، {أ ، حـ} ، {ب ، حـ}

وبذلك نكون قد عينّا جميع أجزاء سـ . تسمى المجموعة التي عناصرها أجزاء سـ **مجموعة أجزاء** سـ ويرمز لها بالرمز جـ (سـ) ويكون :

جـ (سـ) = { ∅ ، سـ ، {أ} ، {ب} ، {حـ} ، {أ ، ب} ، {ب ، حـ} ، {أ ، حـ} }

ويلاحظ أنه لما كان {أ} ⊂ سـ فان {أ} ∈ جـ (سـ)
وبالمقابل بما أن {أ} ∈ جـ (سـ) فان {أ} ⊂ سـ

وبشكل عام ، إذا كانت جـ (سـ) جماعة أجزاء المجموعة سـ فان كل جزء ع من سـ يكون عنصراً في المجموعة جـ (سـ) . أي أن :

(ع ⊆ سـ) ⇐ ع ∈ جـ (سـ)

وبالعكس اذا كان ع عنصراً في جـ (سـ) فان ع يكون مجموعة

جزئية من سه أي أن :

(ع ∈ ج (سه)) ⇐ ع ⊆ سه

ومما تقدم نحصل على التكافؤ المنطقي :

(ع ∈ ج (سه)) ⇔ (ع ⊆ سه)

مثال (١) : لتكن ط مجموعة الأعداد الطبيعية :

١ - {١ ، ٢ ، ٣} ∈ ج (ط) ، لأن {١ ، ٢ ، ٣} ⊆ ط

٢ - اذا كانت سه = {س : س عدد فردي}
فان سه ∈ ج (ط) ، لأن سه ⊂ ط

٣ - {٢ ، ٤ ، ٣ $\frac{١}{٢}$} ∉ ج (ط)، لأن {٢ ، ٤ ، ٣ $\frac{١}{٢}$} ⊈ ط
حيث ٣ $\frac{١}{٢}$ ∉ ط .

مثال (٢) : لتكن سه مجموعة نقاط مستوٍ ولنعتبر في هذا المستوي نقطة أ و ن مجموعة نقاط مستقيم في هذا المستوي و د مجموعة نقاط محيط دائرة في المستوي المذكور ، و ج مجموعة النقاط الداخلية لمثلث في هذا المستوي فيكون لدينا :

أ ∉ ج (سه) لأن أ عنصر من سه وليست جزءاً منها

ن ∈ ج (سه) لأن ن ⊂ سه

د ∈ ج (سه) لأن د ⊂ سه

ج ∈ ج (سه) لأن ج ⊂ سه

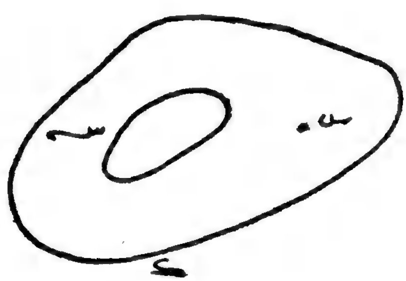
٢٧ – المجموعة الكلية :

كل مجموعة تهمنا عناصرها أو أجزاؤها أثنـاء دراسة معينة تسمى المجموعة الـكلية (أو الشاملة) (Ensemble Universel, Universal Set) وبعبارة أخرى : إذا كانت جميع المجموعات الواردة في دراسة معينـة (نظرية رياضية ، مسألة معينة) أجزاء من مجموعة واحدة معينة سمينا هذه المجموعة بالمجموعة الـكلية .

مثال (١) : مجموعة نقاط مستوٍ هي المجموعة الـكلية لدراسة قضايا الهندسة المستوية ، ومن الواضح أن كل شكل من الأشكال المستوية في مستوٍ هو مجموعة جزئية من هذا المستوي .

مثال (٢) : مجموعة الأعداد الطبيعية ط هي المجموعة الـكلية التي تُدَرَّس من خلالها مبادىء الحساب لأطفال السنوات الأولى في المدرسة الابتدائية .

وإذا رمزنا لمجموعة كلية بالرمز ك وكان س عنصراً من ك وكان سـ جزءاً من ك فيمكن تمثيل ذلك بمخططات فين كما في الشكل (٩).



الشكل (٩)

تمارين محلولة

مفهوم المجموعة وطرق تعيينها :

١٩ – عيّن عناصر كل المجموعات الآتية ، وهل يمكنك دائماً ذكر جميع عناصر المجموعة ؟

١ – مجموعة أرقام العدد ٣٨٤٥٦

٢ – مجموعة أرقام العدد ٤١١١٥

٣ – مجموعة جذور المعادلة $س^٢ - ١ = ٠$

٤ – مجموعة مضاعفات العدد ٥

الحل :

١ – مجموعة الارقام هي : {٦ ، ٥ ، ٤ ، ٨ ، ٣}

٢ – مجموعة الأرقام هي : {٥ ، ١ ، ٤}

٣ – مجموعة جذور المعادلة هي : {– ١ ، ١}

٤ – مجموعة المضاعفات المطلوبة هي :

{٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ...}

وواضح أنه لا يمكن الانتهاء من ذكر عناصر هذه المجموعة ..

٢٠ – اقرأ العبارتين الآتيتين :

سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

صـ = {س : س من سكان القاهرة}

الحل :

س هي مجموعة الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

ص هي مجموعة العناصر س بحيث س من سكان القاهرة

٢١ – اكتب المجموعتين :

س = { س : س، حرف في (نهر الأردن) }

ع = { س : س ∈ ع و س^{٢} = ١٦ }

بذكر عناصر كل منهما .

الحل :

١ – نكتفي بذكر كل حرف مكرر ، مرة واحدة فنجد :

س = { ن ، هـ ، ر ، ا ، ل ، د }

٢ – إن عناصر ع هي الجذور الحقيقية للمعادلة س^{٢} = ١٦ أي أن:

ع = { – ٤ ، + ٤ }

٢٢ – عيّن المجموعتين :

(١) س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }

(٢) ع = { الأرض ، زحل ، المشتري ، عطارد ، المريخ ، الزهرة ، بلوتو ، نبتون ، اورانوس }

باستخدام خاصة مشتركة بين عناصر المجموعة .

الحل :

(١) بفرض ى رمز لأحد عناصر س وبملاحظة أن عناصر س هي أعداد طبيعية محصورة بين العددين ١ و ٨ نكتب :

س = { س : س ∈ ط و ١ < س < ٨ }

(٢) بفرض ع أحد عناصر ع وبملاحظة أن عناصر ع تشترك

بكونها كواكب سيارة نكتب :

ع = { ع : ع كوكب سيار } .

مفهوم الانتماء :

٢٣ – اكتب برموز رياضية كلا من الجمل الآتية :

د نقطة من المستقيم ى ،

الفرات من مجموعة الأنهار العربية ج ،

π عدد حقيقي .

الحل :

د $\in$ ى ، الفرات $\in$ ج ، $\pi \in$ ح

٢٤ – اكتب بالعربية كلا من الجمل الأربع الآتية :

١٢٠ $\in$ ص ، ٠ $\in$ ح+

مركز دائرة $\notin$ محيطها ، المستقيم ى $\in$ المستوي ك

الحل :

١٢٠ ينتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة

الصفر ينتمي إلى المجموعة ح+

مركز الدائرة لا ينتمي إلى محيطها

المستقيم ى ينتمي إلى المستوي ك

المجموعة الخالية :

٢٥ – ما الفرق بين { } و { ٠ }

الحل :

المجموعة الأولى هي المجموعة الخالية في حين ان المجموعة الثانية هي مجموعة ينتمي اليها عنصر واحد هو الصفر فهي مجموعة وحيدة العنصر .

٣٦– ما الخطأ والصواب فيما يلي :

١ً – ٠ ∋ ∅ ، ٢ً – ٠ ∌ { }

٣ً – أ ∋ ∅ ، ٤ً – حـ ∌ ∅

الحل :

بما أن المجموعة الخالية لا ينتمي إليها أي عنصر إذن :

١ ، ٣ خاطئتان و ٢ ، ٤ صحيحتان .

المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية ومخططات فين :

٢٧ – بيّن أي المجموعات التالية منتهية .

١ً – مجموعة أشجار النخيل في بساتين المدينة المنورة .

٢ً – { س : س سيارة خاصة في سوريا }

٣ً – { م : م مربع في مستوٍ }

٤ً – { س : س ∋ صـ و س + (– س) = ٠ }

٥ً – { س : س ∋ ط و س > ٨ }

الحل :

١ً – هي مجموعة منتهية ، حيث يمكننا إحصاء أشجار النخيل في بساتين المدينة المنورة .

٢ً – مجموعة منتهية ، لأن عملية عدّ السيارات الخاصة في سوريا لا بد لها أن تنتهي .

٣ً – مجموعة غير منتهية ، حيث لا يمكننا الانتهاء عن عدّ المربعات التي يمكن رسمها في مستوٍ .

٤ً – مجموعة غير منتهية ، لأن هذه المجموعة هي مجموعة الأعداد الصحيحة صـ نفسها .

٥ً ـ مجموعة منتهية ، لأن هذه المجموعة تتكون من ثمانية عناصر هي
٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧

٢٨ ـ لتكن ج مجموعة فرق لاعبي كرة القدم في العالم العربي والمطلوب :

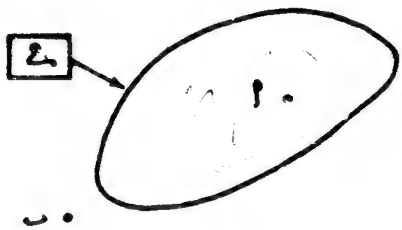
١ً ـ هل ج مجموعة منتهية أم غير منتهية ؟

٢ً ـ مثّل ج بمخطط فين ، ماذا تمثل نقطة أ داخل المخطط ، وإذا أردت أن تمثل أحد أفراد الفرق بنقطة ب فأين تقع هذه هذه النقط بالنسبة للمخطط .

الحل :

١ً ـ ج مجموعة منتهية لأننا نستطيع إحصاء عناصرها .

٢ً ـ يمكن تمثيل ج بسطح محدود بمنحن الشكل (١٠) .



الشكل (١٠)

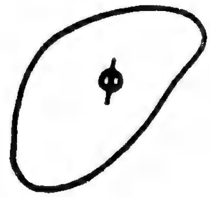
وكل نقطة مثل أ داخل المخطط تمثل إحدى فرق المجموعة ج ، وإذا أردنا أن نمثل أحد أفراد الفرق بنقطة ب فإن ب تقع خارج المخطط لأنها لا تمثل أحد عناصر المجموعة ج .

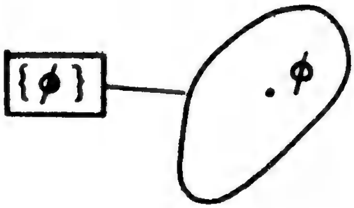
٢٩ ـ ما الفرق بين   و { ∅ } وضّح إجابتك باستخدام مخطط فين.

الحل :

إن ∅ هي المجموعة الخالية التي لا ينتمي اليها عنصر ما . وقد رأينا

أنها تمثل بمخطط كما في الشكل (١١) .





الشكل (١١)   الشكل (١٢)

وبملاحظة أن المجموعة الخالية ∅ هي كائن رياضي فمن الواضح أن {∅} تكون مجموعة وحيدة العنصر ، عنصرها الوحيد هو المجموعة الخالية ∅ ويمكننا أن نكتب :

∅ ∈ {∅}

وهكذا نجد أن ∅ مجموعة خالية بينما {∅} مجموعة غير خالية وانما هي مجموعة ذات العنصر الوحيد ∅ والتي يمكن تمثيلها بالشكل (١٢) .

تساوي المجموعات :

٣٠ – ما هي المجموعات المتساوية فيما يلي :

سـ = { س : س ∈ ع ، $س^{٢}$ − ٢٥ = ٠ }

ع = { س : س ∈ ط ، $س^{٢}$ − ٢٥ = ٠ }

صـ = { س : س ∈ صـ ، (س + ٥) (س − ٥) = ٠ }

الحل :

إذا عيّنا عناصر كل مجموعة من هذه المجموعات وجدنا :

سـ = { ٥ ، −٥ } ، ع = { ٥ } ، صـ = { ٥ ، −٥ }

وواضح أن سـ = صـ فقط .

٣١ – هل المجموعتان التاليتان متساويتان ؟

سـ = { {١ ، ٢} ، {٢} ، {٣} }

ع = { {٢} ، {٢ ، ١} ، ٣ }

الحل :

سـ ≠ ع لأن {٣} تنتمي إلى سـ ولا تنتمي إلى ع أو لأن ٣ تنتمي إلى ع ولا تنتمي إلى سـ .

٣٢ – هل المجموعتان التاليتان متساويتان ؟

سـ = {أ ، ب ، حـ ، ء}

ع = { {أ ، ب} ، {حـ ، ء} }

الحل :

سـ ≠ ع لأن للمجموعة سـ أربعة عناصر أ ، ب ، حـ ، ء وللمجموعة ع عنصران هما المجموعتان {أ ، ب} ، {حـ ، ء} وواضح أنه ليس للمجموعتين سـ و ع العناصر نفسها .

المجموعات الجزئية والاحتواء :

٣٣ – إذا كانت سـ = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

و ع = { س : س ∈ ط ، س ≤ ٨ }

بيّن صحة أو خطأ كلٍ مما يلي مع ذكر السبب :

(١) : سـ ⊆ ع ، (٢) : سـ ≠ ع

الحل :

إذا كتبنا :

ع = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }

نلاحظ أن (١) صحيحة ، لأن كل عنصر من سـ ينتمي إلى ع

وأن (٢) خاطئة ، لوجود عدة عناصر في ع هي : ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ لا تنتمي إلى سـ . وبما أن سـ ⊆ ع و سـ ≠ ع فيمكننا أن نكتب : سـ ⊂ ع

ويمكننا القول أيضاً إن (٢) خاطئة ، لأن ع ⊈ سـ وبالتالي لعدم تحقق شرطي التساوي وهما : سـ ⊆ ع و ع ⊆ سـ

٣٤ – لتكن سـ = { س ، ع ، ص } . اذكر الخطأ والصواب في استخدام الرموز ⊆ ، ⊂ ، ∈ فيما يلي :

١ – س ∈ سـ
٢ – ع ⊂ سـ
٣ – سـ ⊆ سـ
٤ – سـ ⊂ سـ
٥ – { س } ∈ سـ
٦ – ∅ ⊂ سـ
٧ – ∅ ⊂ س
٨ – { س } ⊆ سـ
٩ – ∅ ∈ سـ
١٠ – { س ، ع } ⊂ سـ

الحل :

١ – صح ، لأن س عنصر من سـ
٢ – خطأ ، لأن ع عنصر من سـ ورمز الاحتواء الحقيقي يدل على احتواء مجموعة في أخرى ، والصحيح أن نكتب :
ع ∈ سـ
٣ – صح ، الفقرة (٢٢)
٤ – خطأ ، لأنه ليس في سـ عنصر واحد على الأقل لا ينتمي إلى سـ
٥ – خطأ ، لأن { س } جزء من سـ ومنه فإن { س }
٦ – صح ، الفقرة (٢٢)
٧ – خطأ ، لأن ∅ مجموعة و س عنصر .

٨ً — صح ، لأن { س } جزء من سـ

٩ً — خطأ ، لأن ∅ ليست عنصراً في سـ وإنما هي جزء من سـ

١٠ً — صح ، لأن { س ، ع } جزء حقيقي من سـ .

٣٥ – إذا كانت المجموعة سـ جزءاً من ∅ فأثبت أن سـ = ∅ :

الحـل :

من المعلوم أن : ∅ ⊆ سـ الفقرة (٢٤)

ولدينا سـ ⊆ ∅ بالفرض

وحسب الفقرة (٢٥) نجد :

[∅ ⊆ سـ و سـ ⊆ ∅] ⟺ [سـ = ∅]

٣٦ – إذا كانت سـ ، ع ، صـ ثلاث مجموعات فأثبت أن :

(سـ ⊆ ع و ع ⊆ صـ) ⟸ سـ ⊆ صـ

الحـل :

لإثبات أن سـ ⊆ صـ يجب أن نبرهن أن كل عنصر س ∈ سـ هو عنصر في صـ أي أن نبرهن أن :

(∀ س ، س ∈ سـ) ⟸ (س ∈ صـ)

في الحقيقة :

∀ س ، س ∈ سـ ⟸ س ∈ ع لأن سـ ⊆ ع فرضاً

كما أن س ∈ ع ⟸ س ∈ صـ لأن ع ⊆ سـ فرضاً

ومنه المطلوب .

٣٧ – لتكن سـ مجموعة جميع الأشكال الرباعية في مستوٍ و ع مجموعة جميع المربعات و صـ مجموعة جميع المستطيلات في هذا المستوي.

بيّن الصواب والخطأ فيما يأتي مع ذكر السبب :

١َ- ع ⊂ س ، ٢َ- ع ⊂ ص
٣َ- ص ⊂ ع ، ٤َ- ص ⊂ س
٥َ- ص ⊂ ع ⊂ س .

الحل :

١َ- عبارة صحيحة ، لأن كل مربع هو شكل رباعي وبالتالي فان كل عنصر من ع هو عنصر من س أي أن ع ⊂ س .

٢َ- عبارة صحيحة ، لأن كل مربع هو مستطيل تساوى بعداه ولذا فإن كل عنصر من ع هو أيضاً عنصر من ص أي أن ع ⊂ ص.

٣َ- عبارة خاطئة ، لأن ص فيها عناصر لا تنتمي إلى ع وهي المستطيلات ، حيث أننا لا نستطيع اعتبار كل مستطيل مربعاً.

٤َ- عبارة صحيحة ، لأن كل مستطيل من ص هو شكل رباعي أي هو عنصر من س أي أن ص ⊂ س .

٥َ- عبارة خاطئة لأن ص مجموعات المستطيلات غير محتواة في ع مجموعة المربعات .

مجموعة أجزاء مجموعة :

٣٨- عيّن ج (س) من أجل س = { ١ ، ٢ ، ٣ } :

الحل :

إن ج (س) هي جماعة جميع أجزاء س .
ومن الواضح أن ∅ و س من أجزاء س .

وأن أجزاء س التي يتكون كل منها من عنصر واحد هي :
{١} ، {٢} ، {٣}

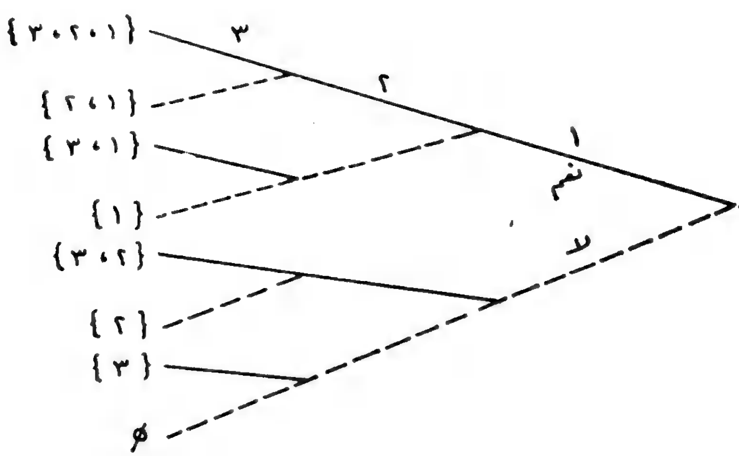
وإن أجزاء سـ التي يتكون كل منها من عنصرين هي :

{١، ٢} ، {٢، ٣} ، {١، ٣}

وليس هناك طبعاً أجزاء أخرى لـ سـ ولذا فإن :

ج (سـ) = { ∅ ، سـ ، {١} ، {٢} ، {٣} ، {١، ٢} ، {١، ٣} ، {٢، ٣} }

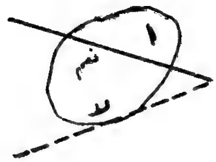
ويمكن الحصول على جميع عناصر ج (سـ) بطريقة تسمى **طريقة الشجرة** كما هو مبين في الشكل (١٣) .



الشكل (١٣)

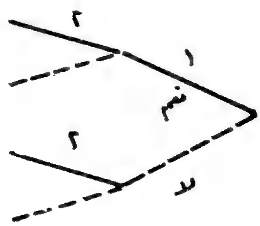
ويتم إنشاء فروع هذه الشجرة ، بأن نسأل عن وجود العنصر ١ في مجموعة جزئية لـ سـ ، وبسبب وجود مجموعات جزئية يكون ١ عنصراً فيها ومجموعات جزئية ليس ١ عنصراً فيها . فلدينا امكانيتان للاجابة على هذا السؤال (نعم أو لا) نمثلهما بأول فرعين للشجرة الشكل (١٤) حيث

يمثل الفرع المتصل الاجابة بـ (نعم) أي حالة وجود العنصر ١ ، ويمثل الفرع المنقط الإجابة بـ (لا) أي حالة عدم وجود العنصر ١ .



الشكل (١٤)

ومن أجل كل فرع من الفرعين السابقين ، نسأل بنفس الأسلوب عن وجود العنصر ٢ في مجموعة جزئية فتصبح الشجرة كما في الشكل (١٥)

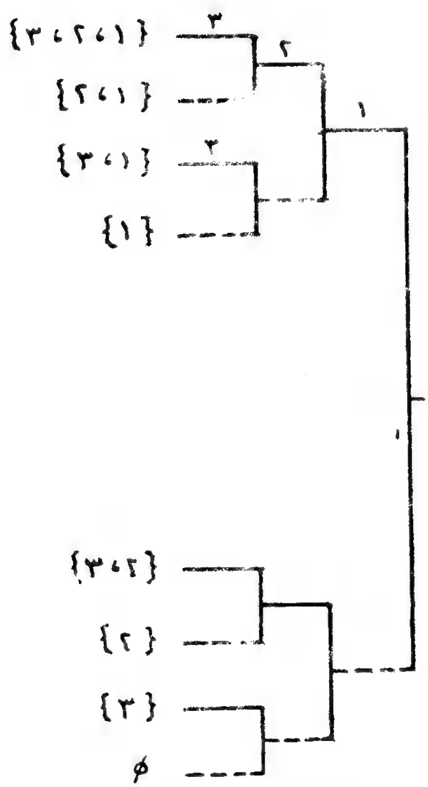


الشكل (١٥)

ثم من أجل كل فرع من فروع الشجرة في الشكل (١٥) نسأل عن وجود العنصر ٣ في مجموعة جزئية فتصبح الشجرة كما في الشكل (١٣) وبتتبع كل فرع من فروع هذه الشجرة منذ نهايتـه حتى نشأته الأولى تتعين لدينا في نهايته المجموعة الجزئية الموافقة .

ملاحظة :

يمكن للشجرة المستخدمة لإيجاد أجزاء مجموعة أن تكون كما في



الشكل (١٦)

٣٩ - أوجد ج (ع) إذا كانت ع = {أ ، ب ، حـ ، د} وما هي الأجزاء الحقيقية للمجموعة ع .

الحل :

ان مجموعة أجزاء المجموعة ع تتكون من :

(١) المجموعة الخالية ∅ .

(٢) المجموعات التي تحوي عنصراً واحداً فقط وهي :

{أ} ، {ب} ، {حـ} ، {د}

(٣) المجموعات التي تحوي عنصرين فقط ونحصل عليها من المجموعات التي تحوي عنصراً واحداً باضافة – على التوالي – حرف من الحروف التي تأتي بعد الحرف الذي تحويه المجموعة :

{ م ، ب } ، { م ، حـ } ، { م ، ء } ، { ب ، حـ } ،
{ ب ، ء } ، { حـ ، ء }

(٤) المجموعـات التي تحوي ثلاثـة عناصر فقط ونحصل عليهـا من المجموعات التي تحوي عنصرين باضافة – على التوالي – حرف من الحروف التي تأتي بعد الحرف الاخير الذي تحويه المجموعة :

{ م ، ب ، حـ } ، { م ، ب ، ء } ، { م ، حـ ، ء } ،
{ ب ، حـ ، ء }

(٥) المجموعة الكلية { م ، ب ، حـ ، ء }

ان عدد عناصر مجموعة الاجزاء هو :

$$١ + ٤ + ٦ + ٤ + ١ = ١٦ = ٢^{٤}$$

وان جميع عناصر ج (ع) ما عدا العنصر { م ، ب ، حـ ، ء } هي أجزاء حقيقية للمجموعة ع .

• ٤ – أوجد عدد عناصر جماعة أجزاء مجموعة مكونة من ن عنصراً.

الحل :

إن للمجموعة الخالية جزء واحد هو المجموعة ∅ .

أما المجموعة ذات العنصر الواحد { م } فإن لها مجموعتين جزئيتين هما ∅ و { م } .

ولكي نحصل على أجزاء المجموعة { م ، ب } فإنه يكفي أن نضيف إلى أجزاء المجموعة { م } المجموعات التي تنتج عن ضم ب إلى عناصر

هذه الاجزاء فتكون أجزاء المجموعة { ٲ ، ب } هي :

$$\varnothing \quad ، \quad \{ ٲ \}$$

$$\{ ب \} \quad ، \quad \{ ٲ ، ب \}$$

وزيادة عنصر إلى عناصر المجموعة يؤدي إلى مضاعفة عناصر مجموعة الاجزاء أي أن :

عدد عناصر ج ({ ٲ ، ب }) = ٢ × عدد عناصر ج ({ ٲ }) = ٢ × ٢ = ٢^٢

وبصورة عامة اذا كتبنا في جدول المجموعات الجزئية للمجموعة { ٲ ، ب ، ... ، هـ } التي عدد عناصرها ل وإذا أردنا أن نجد الجدول الذي يحوي المجموعات الجزئية للمجموعة { ٲ ، ب ، حـ ، ... ، هـ ، و } والذي نرمز له بـ $ج_{ل+١}$ فإننا نلاحظ انـه يمكن تجزئـة المجموعة $ج_{ل+١}$ الى مجموعتين جزئيتين متباينتين ، الاولى تحوي المجموعات الجزئية التي لا ينتمي اليها العنصر و والثانية تحوي المجموعات الجزئية التي ينتمي اليها العنصر و . والثانية تنتج عن الاولى بإضافة العنصر و الى كل منها وهذا ما يبرهن على أن عدد عناصر المجموعة $ج_{ل+١}$ = ٢ × عدد عنـاصر $ج_{ل}$.

اذا رمزنا بـ د $ج_{ل}$ لعدد عناصر مجموعة الاجزاء لـ $ج_{ل}$ فانـه يمكننا أن نكتب :

$$د \; \varnothing = ١$$

$$د \; ج_{١} = ٢ \times د \; \varnothing$$

$$د \; ج_{٢} = ٢ \times د \; ج_{١}$$

$$د \; ج_{٣} = ٢ \times د \; ج_{٢}$$

. . . . .

$$د ح_{د-١} = ٢ \times د ح_{د-٢}$$

$$د ح_{د} = ٢ \times د ح_{د-١}$$

وإذا ضربنا هذه العلاقات ببعضها طرفاً بطرف ثم اخت
المكررة في الطرفين فسوف نجد :

$$د ح_{ن} = ٢^{ن}$$

★ ★ ★

تمارين غير محلولة

٤١ – عيّن عناصر كل من المجموعات الآتية . هل يمكنك دائماً ذكر جميع عناصرها ؟

١ – مجموعة أرقام العدد ٣٠٠٠

٢ – مجموعة قواسم العدد ٢٤

٣ – مجموعة مربعات الاعداد ١ ، ٣ ، ٥ ، ٤

٤ – مجموعة العوامل الاولية للعدد ١٨٠

٥ – مجموعة الحرف الأول في كل من الأسماء التالية : ياسر ، أحمد ، يمان ، بشار ، محمود ، أنيس ، هند ، محمد ، سليم ، حليم ، ماهر.

٦ – مجموعة مكعبات الأعداد الطبيعية .

٧ – المجموعة ص+ .

٤٢ – اكتب المجموعات التالية بذكر عناصر كل منها :

س = { س : س رقم من أرقام العدد ٣٠١٦٠١ }

ص = { ف : ف فصل من فصول السنة }

ع = { س : س ∈ ط ، س^{٢} + ٢ س – ١٥ = ٠ }

٤٣ – عيّن المجموعات التالية باستخدام خاصة مشتركة بين عناصر كل مجموعة :

ع = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ... }

س = { -١ ، ٠ ، +١ }

ع = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

٤٤ – عيّن المجموعات التالية بالطريقة المناسبة :

ع مجموعة مربعات الأعداد الصحيحة .

ص مجموعة طلاب جامعة دمشق .

ج مجموعة مكعبات عناصر المجموعة { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }

٤٥ – اكتب برموز رياضية كلاً من الجمل الآتية :

الجولان هضبة من مجموعة هضاب القطر السوري .

القمر الطبيعي (ق) لا ينتمي الى مجموعه الأقمار الصناعية (ج) .

طرطوس ميناء من مجموعة موانىء البحر الأبيض المتوسط .

٤٦ – اكتب بالعربية كلاً من الجمل الآتية :

√٧ ∈ ح+ ، ١٢٥ ∈ ط

النقطة هـ ∈ المستقيم س

مركز المستطيل ∉ محيطه .

٤٧ – اذكر الصواب والخطأ فيما يأتي :

١ً – ٦ ∈ { س : س عدد طبيعي < ٨ }

٢ً – ٨ ∈ { س : س عدد طبيعي < ٦ }

٣ً – √٥ ∈ ط

٤ً – ٣ ∈ { س : س عدد زوجي }

٥ً – مركز مربع ∈ أحد قطريه

٦ً – ليبيا ∈ مجموعة الأقطار العربية .

٧ً – ٢ ∉ { س : س ∈ ح و س – ٣ = ٠ }

٨ً – ٤ ∋ { س : س ∋ ح و س^٢ – ٨ س + ١٦ = ٠ }

٩ً – ٥ ∋ { ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٣٥ }

١٠ً – ٣ ∌ ١٣ ، ٢٣ ، ٣٣ ، ٤٣ ، ٥٣ }

٤٨ – ما المجموعات الخالية فيما يلي :

١ً – { س : س شخص طوله أكثر من ٥ أمتار }

٢ً – { ع : ع عدد فردي وزوجي معاً }

٣ً – { س : س ∋ ط و س ∌ ط* }

٤ً – { س : س ∋ ص و س ∌ ص }

٥ً – { س : س دائرة لا مركز لها }

٤٩ – أوجد س في كل الحالات الآتية :

١ً – س ∋ {٢} ، ٢ً – س ∋ {٠}

٣ً – {س} = {٦} ، ٤ً – {س} = {أ}

٥٠ – بيّن فيما يلي المجموعات المنتهية :

١ً – مجموعة وزارات الدولة

٢ً – { س : س عدد زوجي }

٣ً – { ع : ع مستقيم يمر من نقطة خارج المستقيم ل ويلتقي مع ل }

٤ً – { س : س ∋ ص و س ⩽ ٥ }

٥ً – { س : س ∋ ص و – ٣ ⩽ س ⩽ ٢ }

٦ً – مجموعة نجوم السماء .

٥١ – بيّن الجماعات في المجموعات التالية :

١ً – مجموعة نقابات العمال في الوطن العربي .

٢ً – مجموعة الداجن في سهل البقاع .
٣ً – مجموعة عمال سد الفرات .
٤ً – المجموعة { { } ، {أ} ، {أ ، ب} }
٥ً – المجموعة { ٧ ، ٨ ، {١} ، {١ ، ٥} ، {٦} }

٥٢ – هل المجموعات التالية متساوية ؟

س = {س : س ∈ ح و س٢ – ١٣ س + ٣٦ = ٠}
ع = {ع : ع ∈ ص و (ع – ٤) (ع – ٩) = ٠}
ص = مجموعة مربعي العددين ٢ ، ٣

٥٣ – برهن أن .

١ً – {س : س ∈ ح و س٢ = ٤}
= {س : س ∈ ص و (س – ٢) (س + ٢) = ٠}

٢ً – {س : س ∈ ح و س٢ – س = ٠}
= {س : س ∈ ط و س < ٢}

٣ً – {س : س ∈ ص و – ٢ < س < ١}
= {س : س ∈ ح و س٢ + س = ٠}

٤ً – مجموعة حروف كلمة (منير) = مجموعة حروف كلمة (نمير).

٥٤ – برهن أن المجموعة س = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١٠}
ليست مجموعة جزئية من المجموعة ع = {س : س عدد زوجي}

٥٥ – برهن أنه إذا كان س ∈ س فان {س} ⊂ س وبالعكس.

٥٦ – إذا كان س ⊆ {أ} فأوجد جميع الحلول الممكنة لهذه العبارة (أي جميع المجموعات التي يمكنها أن تحل محل س وتبقى العبارة صحيحة) .

٥٧ – إذا كان س ⊃ { أ ، ب } فأوجد جميع الحلول الممكنة لهذه العبارة .

٥٨ – لتكن س مجموعة جميع الأشكال الرباعية في مستوٍ و ع مجموعة جميع المستطيلات و ص مجموعة جميع متوازيات الأضلاع في نفس المستوي . وليكن أ رمزاً لأحد الأشكال الرباعية و ب رمزاً لأحد المستطيلات و حـ رمزاً لأحد متوازيات الأضلاع . بيّن أي العبارات الآتية صحيحة مع بيان السبب

١ – أ ∋ س ، ٢ – ب ∋ س
٣ – حـ ∋ س ، ٤ – أ ∋ ع
٥ – أ ∋ ص ، ٦ – ب ∋ ص
٧ – ب ∋ ع ، ٨ – حـ ∋ ع
٩ – ع ⊃ س ، ١٠ – ص ⊃ ع
١١ – ع ⊃ ص ، ١٢ – ص ⊃ ع ⊃ س

٥٩ – بيّن الخطأ والصواب فيما يأتي :

١ – { أ } ∋ { أ } ، ٢ – { أ } ∋ { { أ } }
٣ – { أ } ⊃ { أ } ، ٤ – { أ } ⊃ { { أ } }
٥ – ٢ ∋ { ∅ ، { ٢ } ، { { ١ ، ٢ } }
٦ – ∅ ∋ { ٢ }
٧ – ∅ ⊃ { ٢ }
٨ – ∅ ⊃ ج ({ أ ، ب })
٩ – ∅ ∋ ج ({ أ ، ب })
١٠ – أ ∋ ج ({ أ ، ب })
١١ – { أ } ⊇ ج ({ أ ، ب })
١٢ – { ب } ∋ ج ({ أ ، ب })

١٣ - {ب} ⊆ {أ ، ب}

١٤ - أ ∈ {أ ، {أ}}

١٥ - {أ} ∈ {أ ، {أ}}

١٦ - {أ} ⊆ {أ ، {أ}}

١٧ - {{أ}} ⊆ {أ ، {أ}}

٦٠ - لتكن س مجموعة طلاب مدرستك و ع مجموعة الأساتذة فيها و ص مجموعة طلاب السنة النهائية و ف مجموعة الطلاب المتفوقين في هذه السنة و أ أحد هؤلاء الطلاب المتفوقين . بيّن الصواب فيما يأتي :

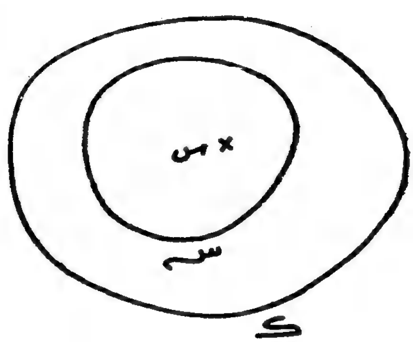
١ - ع ⊂ س ، ٢ - ف ⊂ س

٣ - ص ⊂ س ، ٤ - أ ∈ ص

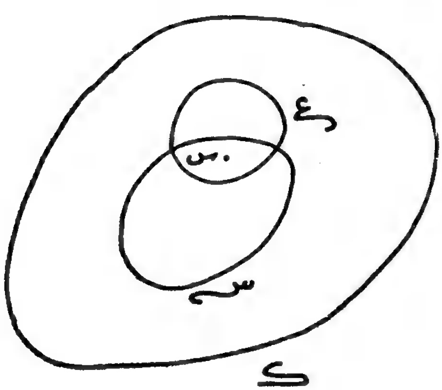
٥ - أ ∈ س ، ٦ - أ ∈ ف ⊂ ص ⊂ س

ارسم باستخدام مخططات فين موضحاً العبارات الصحيحة في هذا التمرين .

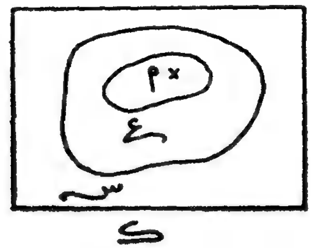
٦١ - اذكر العبارات التي يمثلها كل من المخططات الآتية :



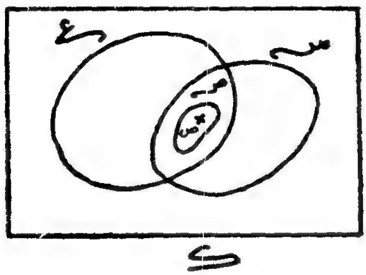
الشكل (١٧)



الشكل (١٨)



الشكل (١٩)



الشكل (٢٠)

٦٢ – اذا كانت س ، ع ، ص ثلاث مجموعات فأثبت أن :

(س ⊃ ع و ع ⊇ ص) ⇐ س ⊃ ص

أجوبة وارشادات

٤١ – ١ – { ٣ ، ٠ }

٢ – { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٢ ، ٢٤ }

٣ – { ١ ، ٩ ، ٢٥ ، ١٦ }

٤ – { ٣ ، ٢ ، ٥ }

٥ – { ى ، أ ، ب ، م ، هـ ، س ، ح }

٦ – { ٠ ، ١ ، ٨ ، ٢٧ ، ... }

٧ – { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ... }

ومن المتعذر ذكر جميع عناصر كل من المجموعتين (٦) ، (٧)

٤٢ – س = { ١ ، ٠ ، ٦ ، ٣ }

ص = { الربيع ، الخريف ، الصيف ، الشتاء }

ع تتكون من الأعداد الطبيعية التي تحقق المعادلة :

$$س^2 + 2س - 15 = 0$$

وبما أن للمعادلة جذرين هما −٥ ، ٣ فان ع = {٣}

٤٣ – ع = { س : س عدد زوجي موجب }

سه = { س : س ∋ صه و −١ ⩽ س ⩽ ١ }

ع = { س : س رقم عربي }

٤٤ – ع = {س : س = ع٢ و ع ∋ صه }

صه = { ط : ط طالب في جامعة دمشق }

ع = { −١ ، ٠ ، ١ ، ٨ }

٤٥ – الجولان ∋ مجموعة هضاب القطر السوري ، ن ∌ ج ،
طرطوس ∋ مجموعة موانىء البحر المتوسط .

٤٦ – √٧ عدد حقيقي موجب .

١٢٥٠ عدد طبيعي .

ه نقطة من المستقيم سه

مركز المستطيل لا يقع على محيطه .

٤٧ – سنرمز للصواب بـ (ص) وللخطأ بـ (خ) .

(١) ص (٢) خ (٣) خ (٤) خ (٥) ص

(٦) ص (٧) ص (٨) ص (٩) خ (١٠) ص

٤٨ – المجموعات في (١) ، (٢) ، (٤) ، (٥) خالية والمجموعة في (٣) هي {٠} وليست خالية .

٤٩ – (١) س = ٢ ، (٢) س = ٠

(٣) س = ٦ ، (٤) س = م

٥٠ - المجموعات : (١) ، (٥) ، (٦) منتهية .

٥١ - (١) جماعة لأن كل نقابة مجموعة عمال .
(٢) جماعة لأن في كل مدجنة مجموعة خاصة من الدجاج .
(٣) مجموعة .
(٤) جماعة عناصرها المجموعات : { } ، { ٯ } ، { ٯ ، ب }
(٥) مجموعة .

٥٢ - س = ع = ص = { ٤ ، ٩ }

٥٣ - في كل مساواة نعيّن كل مجموعة بذكر عناصرها فنجد أن لكل مجموعتين في مساواة واحدة العناصر نفسها .

٥٤ - لأن العدد ٧ عنصر في س لا ينتمي إلى ع مجموعة الأعداد الزوجية .

٥٥ - يطبق تعريف الاحتواء .

٥٦ - س يجب أن تمثل جزءاً من { ٯ } وجميع أجزاء { ٯ } هي ∅ ، { ٯ } أي أن س = ∅ أو س = { ٯ }

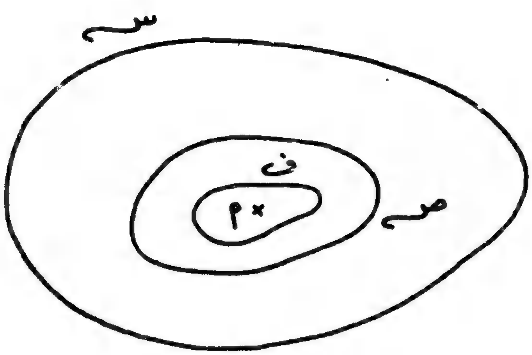
٥٧ - يجب أن تكون س جزءاً حقيقياً لـ { ٯ ، ب } أي أن س هي ∅ أو { ٯ } أو { ب } .

٥٨ - (١) ص : لأن ٯ شكل رباعي .
(٢) ص : لأن المستطيل شكل رباعي .
(٣) ص : لأن متوازي الاضلاع شكل رباعي .
(٤) لا يمكننا القول بصحة العبارة أو بخطئها لأن الشكل الرباعي قد يكون مستطيلاً وقد لا يكون .
(٥) قد يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع وقد لا يكون .

(٦) ص : لأن كل مستطيل هو متوازي أضلاع .
(٧) ص .
(٨) قد يكون متوازي الأضلاع مستطيلا وقد لا يكون
(٩) ص : لأن كل مستطيل شكل رباعي .
(١٠) خ : ليس كل متوازي أضلاع مستطيلا .
(١١) ص : لأن كل مستطيل هو متوازي أضلاع .
(١٢) خ : لأن صـ ⊅ ع .

٥٩ – العبارات الصحيحة هي : (٢) ، (٧) ، (٨) ، (٩) ، (١٢) ، (١٣) ، (١٤) ، (١٥) ، (١٦) ، (١٧) .

٦٠ – العبارات الصحيحة هي :(٢) ، (٣)، (٥)،(٦) ،والشكل (٢١) يمثل هذه العبارات .



الشكل (٢١)

٦١ – الشكل (١٧) س ∈ سـ ⊆ ك

الشكل (١٨) س ∈ سـ ⊆ ك و س ∈ ع ⊆ ك
و سـ ⊈ ع و ع ⊈ سـ

الشكل (١٩) أ ∈ ع ⊆ سـ ⊆ ك

الشكل (٢٠) ص ∈ صـ ⊆ سـ ⊆ ك

و ص ∈ صـ ⊆ ع ⊆ ك

و سـ ⊈ ع و ع ⊈ سـ

٦٢ - لنفرض أن (سـ ⊂ ع ، ع ⊆ صـ) ⇐ سـ ⊆ صـ
إلا أنه إذا كان سـ = صـ فان ع ⊆ سـ لأن ع ⊆ صـ
بالفرض . وهذا خلاف الفرض سـ ⊂ ع وعليه فان
سـ ≠ صـ ومنه المطلوب .

* * *

الفصل الثالث

العمليات على المجموعات

من المهم في الرياضيات في كثير من الأحيان تشكيل كائن رياضي من كائنين رياضيين معلومين ، فمثلاً من العددين ٢ ، ٧ يمكننا أن نشكل العدد ٩ وذلك بجمع هذين العددين ، ويمكننا أن نشكّل من هذين العددين نفسهما العدد ١٤ أيضاً وذلك بضرب أحدهما بالآخر .

وشبيه بهذا الأمر يمكن أن يتم في المجموعات . وسنرى في هذا البحث العمليات الأساسية التي نستطيع بواسطتها أن نشكّل مجموعات جديدة من مجموعات معلومة .

٢٨ - عملية الاجتماع :

لتكن ك مجموعة أعضاء الجمعية الرياضية في احدى الثانويات العربية

و سـ = { س : س ∈ ك ويلعب كرة اليد }

ع = { س : س ∈ ك ويلعب كرة الطاولة }

فالمجموعة الجزئية من ك المكونة من أعضاء الجمعية الذين يلعبون كرة اليد أو كرة الطاولة ، تتكون من كل عضو من ك يلعب كرة اليد فقط ، ومن كل عضو من ك يلعب كرة الطاولة فقط ، ومن كل

عضو يلعب كرة اليد وكرة الطاولة معاً . وتسمى هذه المجموعة **اجتماع**[1] **المجموعتين** سـ و عـ ويرمز لها بالرمز سـ ∪ عـ حيث ∪ **رمز عملية الاجتماع** التي أنجزت على المجموعتين سـ و عـ ونكتب :

سـ ∪ عـ = { س : س ∋ ك و س يلعب كرة اليد أو كرة الطاولة }

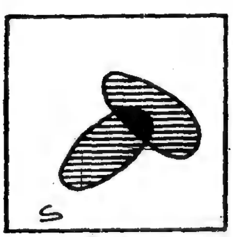
ونقرأ الرمز سـ ∪ عـ : (سـ اجتماع عـ) أو (اجتماع سـ و عـ)

وبصورة عامة :

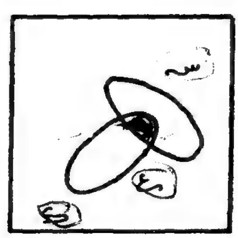
> **تعريف** : اجتماع مجموعتين سـ و عـ هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي على الأقل إلى إحدى المجموعتين سـ و عـ .
> أي أن :
>
> سـ ∪ عـ = { س : (س ∋ سـ) ∨ (س ∋ عـ) }

وللرمز ∨ هنا المدلول نفسه الموضح في الفصل الأول .

واذا كان الشكل (٢٢) هو مخطط المجموعتين الجزئيتين سـ و عـ من المجموعة ك ، فالشكل (٢٣) يمثل مخطط اجتماعهما سـ ∪ عـ ، وهو المجموعة الجزئية من ك التي يمثلها القسم المظلل الذي نحصل عليه بتظليل الأقسام المشتركة وغير المشتركة بين مخططي سـ و عـ في الشكل (٢٣) .



سـ ∪ عـ
الشكل (٢٣)



الشكل (٢٢)

(١) صفحة ٢٢

مثال (١) : إذا كان : سـ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٥}

: ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

فإن : سـ ∪ ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

ويلاحظ هنا وجود عناصر تنتمي إلى سـ فقط وعناصر تنتمي إلى ع فقط وعناصر تنتمي إلى سـ و ع معاً .

مثال (٢) : اذا كان أ = {* ، △} و ب = {* ، ٥ ، △ ، □}

فإن : أ ∪ ب = {* ، △ ، ٥ ، □}

ويلاحظ هنا أن جميع عناصر أ تنتمي إلى ب وأن بعض عناصر ب لا تنتمي إلى أ .

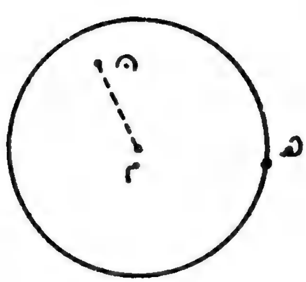
مثال (٣) : لدينا : ص* ∪ {٠} = ص

ويلاحظ هنا عدم وجود عناصر مشتركة بين ص* و {٠}

مثال (٤) : لدينا : ح⁻ ∪ ح⁺ = ح

ويلاحظ هنا وجود عنصر واحد ينتمي الى كل من ح⁻ و ح⁺ هو الصفر .

مثال (٥) : الشكل (٢٤) يمثل قرصاً دائرياً مركزه م ونصف قطره ر .



الشكل (٢٤)

فمجموعة نقاطه الداخلية هي المجموعة :

خ = { د : د م < ر }

ومجموعة نقاطه المحيطية هي المجموعة :

ح = { هـ : هـ م = ر }

وبفرض صـ مجموعة نقاط القرص يكون : صـ = ح ∪ خ

٢٩ – ملاحظات :

(١) كل عنصر لا ينتمي إلى كل من المجموعتين سـ و ع لا ينتمي إلى اجتماعهما سـ ∪ ع . وبالعكس كل عنصر لا ينتمي إلى الاجتماع سـ ∪ ع لا ينتمي إلى أي من المجموعتين سـ و ع أي أن :

(س ∉ سـ ∪ ع) ⟺ ((س ∉ سـ) ∧ (س ∉ ع))

بحيث ∧ هو الرمز المنطقي لحرف العطف (و) .

(٢) يمكن تلخيص الحالات المختلفة الممكنة لانتماء عنصر إلى مجموعتين سـ و ع وما يقابلها بالنسبة للاجتماع سـ ∪ ع في الجدول التالي:

سـ	ع	سـ ∪ ع
١	١	١
١	٠	١
٠	١	١
٠	٠	٠

ويسمى هذا الجدول **جدول الانتماء لعملية الاجتماع .**

لقد رمزنا بـ (١) للحالة التي يكون فيها العنصر س منتمياً إلى المجموعة وبـ (٠) للحالة التي لا يكون هذا العنصر منتمياً إلى المجموعة .

٣٠ – اجتماع عدة مجموعات :

بتطبيق تعريف اجتماع مجموعتين بالتدرّج يمكننا تعيين اجتماع عدة مجموعات:
مثال : لإيجاد اجتماع المجموعات الثلاث :

سـ = { أ ، ب ، حـ }
ع = { ب ، حـ ، د ، هـ }
صـ = { أ ، ب ، د }

يمكننا أن نجري عملية الاجتماع هذه بشكلين مختلفين هما :

(سـ ∪ ع) ∪ صـ   و   سـ ∪ (ع ∪ صـ)

ومن أجل الشكل الأول نكتب :

سـ ∪ ع = { أ ، ب ، حـ } ∪ { ب ، حـ ، د ، هـ }
= { أ ، ب ، حـ ، د ، هـ }

ثم نعين اجتماع هذه المجموعة مع المجموعة الثالثة فيكون اجتماع المجموعات الثلاث هو المجموعة :

(سـ ∪ ع) ∪ صـ = { أ ، ب ، حـ ، د ، هـ } ∪ { أ ، ب ، د }
= { أ ، ب ، حـ ، د ، هـ }

ومن أجل الشكل الثاني نكتب :

ع ∪ صـ = { أ ، ب ، حـ ، د ، هـ }
سـ ∪ (ع ∪ صـ) = { أ ، ب ، حـ } ∪ { أ ، ب ، حـ ، د ، هـ }
= { أ ، ب ، حـ ، د ، هـ }

وهذه النتيجة تطابق النتيجة التي حصلنا عليها في الشكل الأول وسنبرهن في التمرين (٧١) صحة هذه الخاصة بشكل عام أي :

(سـ ∪ ع) ∪ صـ = سـ ∪ (ع ∪ صـ)

وذلك ∀ (سـ ، ع ، صـ)

٣١ – خواص عملية الاجتماع :

يبرهن أن عملية الاجتماع تحقق الخواص الآتية : (انظر التمارين المحلولة: ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١) .

(١) سـ ∪ سـ = سـ وتدعى خاصة اللانمو

(٢) سـ ∪ ∅ = سـ وتدعى خاصة العنصر الحيادي

(٣) سـ ∪ ع = ع ∪ سـ وتدعى الخاصة التبديلية

(٤) سـ ∪ ك = ك حيث ك المجموعة الكلية

(٥) سـ ∪ (ع) ∪ صـ = سـ ∪ (ع ∪ صـ) وتدعى خاصة قابلية الدمج

وتفيد هذه الخاصة أن اجتماع ثلاث مجموعات يتم بالبدء بإيجاد اجتماع مجموعتين متجاورتين ما منها بالترتيب التي أعطيت به هذه المجموعات . وبناء على هذه الخاصة يرمز لعملية اجتماع ثلاث مجموعات بالرمز :

سـ ∪ ع ∪ صـ

دون ضرورة استخدام الأقواس ، وكذلك الأمر بالنسبة لاجتماع عدة مجموعات .

٣٢ – عملية التقاطع :

لنعد إلى مثال الجمعية الرياضية في إحدى الثانويات العربية الفقرة (٢٨) ولنفرض وجود أعضاء في الجمعية يلعبون كرة اليد وكرة الطاولة معاً . في هذه الحالة نستطيع أن نشكل من هؤلاء الأعضاء فرقة خاصة وتكون هذه الفرقة مجموعة جزئيـة من ك تتكون من العناصر التي تنتمي إلى المجموعتين سـ و ع معاً أي من العناصر المشتركة بين سـ و ع . وتسمى هذه المجموعة تقاطع[١] **المجموعتين** سـ و ع ويرمز لها بالرمز

---

(١) Intersetcion

سـ ∩ ع حيث ∩ رمز عملية التقاطع التي انجزت على المجموعتين سـ و ع ونكتب :

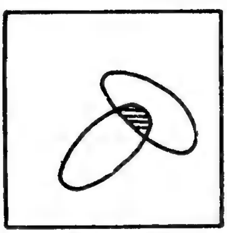
سـ ∩ ع = {س : س ∈ ك . و س يلعب كرة اليد و كرة الطاولة}

ونقرأ الرمز سـ ∩ ع (سـ تقاطع ع) أو (تقاطع سـ و ع) .

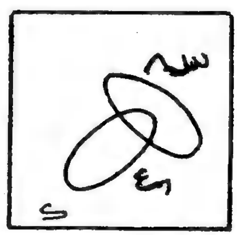
وبصورة عامة :

> **تعريف** : تقاطع مجموعتين سـ و ع هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى كل من المجموعتين سـ و ع أي أن :
>
> سـ ∩ ع = { س : (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ع) }

واذا كان الشكل (٢٥) هو مخطط المجموعتين الجزئيتين سـ و ع من ك . فالشكل (٢٦) يمثل مخطط تقاطعهما سـ ∩ ع وهو المجموعة الجزئية من ك التي يمثلها القسم المظلل الذي نحصل عليه بتظليل القسم المشترك بين مخطط سـ و ع في الشكل (٢٦) .



الشكل (٢٦)



الشكل (٢٥)

مثال (١) : إذا كان سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

ع = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

فإن سـ ∩ ع = {س : س ∈ سـ و س ∈ ع}

= {٢ ، ٤}

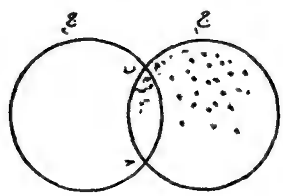
مثال (٢) : إذا كان سـ = {أ ، ب ، حـ ، د} و ع = {أ ، حـ
فإن سـ ∩ ع = {أ ، حـ}

مثال (٣) : لدينا ص+ ∩ ص− = {٠}
لأن الصفر هو العنصر المشترك الوحيد بين ص+ و ص−

مثال (٤) : اذا كان سـ = {△ ، ★} و ع = {○ ، □}
فإن سـ ∩ ع = ∅ وذلك لعدم وجود عناصر مشتركة بين
سـ و ع .

مثال (٥) : إذا كانت ج١ و ج٢ مجموعتي نقاط محيطي دائرتين متقاطعتين في النقطتين ب ، حـ الشكل (٢٧) فيمكننا أن نكتب :

ج١ ∩ ج٢ = {ب ، حـ}



الشكل (٢٧)

٣٣ – ملاحظات :

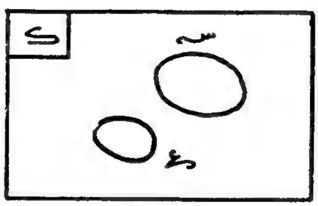
١ – إذا كان س عنصراً لا ينتمي إلى إحدى المجموعتين سـ و ع فإن س لا ينتمي إلى تقاطعهما سـ ∩ ع وبالعكس إذا كان س عنصراً لا ينتمي إلى التقاطع سـ ∩ ع فإن س لا ينتمي إلى إحدى المجموعتين سـ و ع (قد لاينتمي الى كل منهما) أي أن:

(س ∉ سـ ∩ ع) ⟺ ((س ∉ سـ) ∨ (س ∉ ع))

٢ – من الواضح أن جدول الانتماء لعملية التقاطع هو :

سـ	ع	سـ ∩ ع
①	①	ب
٩	٥	ب
ى	⑦	ه
ه	ه	ط

٣ – إذا كان سـ ∩ ع = ∅ قيل إن المجموعتين سـ و ع منفصلتان (disjoint ، Séparé) والشكل (٢٨) هو مخطط مجموعتين منفصلتين .



الشكل (٢٨)

٣٤ – تقاطع عدة مجموعات :

بتطبيق تعريف تقاطع مجموعتين بالتدرج يمكننا تعيين تقاطع عدة مجموعات.

مثال : لايجاد تقاطع المجموعات الثلاث :

سـ = { ا ، ب ، حـ ، ى } ، ع = { ا ، ب ، حـ ، ه }

صـ = { ا ، ب ، ى ، ط ، ه }

يمكننا إجراء العملية بشكلين مختلفين هما :

(سـ ∩ ع) ∩ صـ و سـ ∩ (ع ∩ صـ)

ومن أجل الشكل الأول نكتب :

سـ ∩ ع = { ا ، ب ، حـ ، ى } ∩ { ا ، ب ، حـ ، ه

= { ا ، ب ، حـ }

ثم نعيّن تقاطع هذه المجموعة مع المجموعة الثالثة صـ فيكون تقاطع المجموعات الثلاث هو المجموعة :

(سـ ∩ ع) ∩ صـ = { ا ، ب ، حـ } ∩ { ا ، ب ، ى ، ط ، هـ }
= { ا ، ب }

ومن أجل الشكل الثاني نكتب :

ع ∩ صـ = { ا ، ب ، حـ ، هـ } ∩ { ا ، ب ، ى ، ط ، هـ }
= { ا ، ب ، هـ }

ومنه سـ ∩ (ع ∩ صـ) = { ا ، ب ، حـ } ∩ { ا ، ب ، هـ }
= { ا ، ب }

وهذه النتيجة تطابق النتيجة التي حصلنا عليها في الشكل الأول

ويمكن برهان هذه الخاصة بصورة عامة أي أن :

(سـ ∩ ع) ∩ صـ = سـ ∩ (ع ∩ صـ)

وذلك ∀ (سـ ، ع ، صـ) .

٣٥ – خواص عملية التقاطع :

يبرهن أن عملية التقاطع تتمتع بالخواص الآتية : (انظر التمارين المحلولة : ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣) .

(١) سـ ∩ سـ = سـ (خاصة اللانمو)

(٢) سـ ∩ ك = سـ (خاصة العنصر الحيادي) حيث ك المجموعة الكلية .

(٣) سـ ∩ ع = ع ∩ سـ (الخاصة التبديلية)

(٤) سـ ∩ ∅ = ∅

(٥) (سـ ∩ ع) ∩ صـ = سـ ∩ (ع ∩ صـ) (خاصة قابلية الدمج)

ومعنى هذه الخاصة أن تقاطع ثلاث مجموعات يتم بالبدء بإيجاد تقاطع مجموعتين متجاورتين ما منها بالترتيب، التي أعطيت به هذه المجموعات .

وبناء على هذه الخاصة يرمز لعملية تقاطع ثلاث مجموعات بالرمز :

سـ ∩ ع ∩ صـ

دون ضرورة استخدام الأقواس ، وكذلك الأمر بالنسبة لتقاطع عدة مجموعات .

٣٦ – خاصتا قابلية التوزيع :

١ – إن عملية الاجتماع تقبل التوزيع بالنسبة لعملية التقاطع ، أي أنه إذا كانت سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات فإن :

سـ ∪ (ع ∩ صـ) = (سـ ∪ ع) ∩ (سـ ∪ صـ)

٢ – وتقبل عملية التقاطع التوزيع بالنسبة لعملية الاجتماع . أي أن :

سـ ∩ (ع ∪ صـ) = (سـ ∩ ع) ∪ (سـ ∩ صـ)

انظر التمرين (٨٤) .

٣٧ – عملية الاتمام :

يلاحظ أن كلا من عمليتي الاجتماع والتقاطع يهدف إلى تشكيل مجموعة جديدة من مجموعتين معلومتين ، ويقال عن مثل هاتين العمليتين عملية ثنائية [١] . وهناك بالإضافة إلى عمليتي الاجتماع والتقاطع الثنائيتين عملية أساسية أحادية يتم بواسطتها تشكيل مجموعة جديدة من مجموعة معلومة ، وتسمى هذه العملية ، عملية الاتمام .

فاذا كانت ك مجموعة كتب مكتبتك و سـ مجموعة جميع الكتب الأجنبية منها ، فبقية كتب المكتبة وهي الكتب غير الأجنبية (العربية)

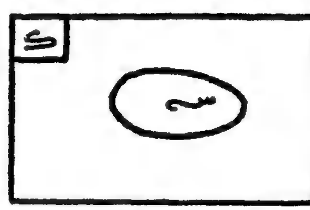
---

(١) Operation binaire, Binary operation

تشكل مجموعة جزئية من ك تسمى المجموعة المتممة للمجموعة سـ بالنسبة لـ ك أو اختصاراً متممة سـ (Complement) . ويلاحظ أن كل عنصر من عناصر متممة سـ لا ينتمي إلى سـ وبالعكس كل عنصر لا ينتمي إلى متممة سـ هو عنصر من سـ. وبصورة عامة :

> **تعريف** : إذا كانت سـ مجموعة جزئية من مجموعة كليـة ك ، فالمجموعة المكونـة من عناصر ك التي لا تنتمي إلى سـ ، تسمى متممة سـ . ويرمز لها بالرمز سـ' ويكون :
>
> سـ' = { س : س ∉ سـ }
>
> ويقرأ الرمز سـ' (متممة سـ)
>
> وواضح أن : (س ∈ سـ') ⟺ (س ∉ سـ)

وإذا كان الشكل (٢٩) يمثـل المجموعة سـ ، فالقسم المظلـل في الشكل (٣٠) يمثل المجموعة سـ' متممة سـ .



الشكل (٢٩)



(الشكل (٣٠)

مثال (١) : إذا كانت ك مجموعة سكان المعمورة و سـ مجموعة الذكور فان سـ' هي مجموعة الإناث والخناثى .

مثال (٢) : إذا كانت ك = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨}
وكانت ع = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧}

فان $ع' = \{٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨\}$ تتكون من عناصر ك التي لا تنتمي إلى ع .

مثال (٣) : إذا كانت صه هي مجموعة الأعداد الصحيحة و ط* مجموعة الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر ، فإن متممة هذه المجموعة بالنسبة لـ صه هي مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة والصفر أي :

$$ط*' = صه$$

مثال (٤) : إذا كانت ض مجموعة المثلثات في مستوٍ وكانت :

$$ع = \{س : س مثلث قائم\}$$

فإن $ع' = \{س : س مثلث غير قائم\}$

٣٨ – ملاحظة :

إن جدول الانتماء لمتممة مجموعة هو :

سه	سه'
٠	١
١	٠

٣٩ – خواص عملية الاتمام : وتتمتع عملية الإتمام بالخواص التالية :

(١) $ك' = \varnothing$ و $\varnothing' = ك$

(٢) $(سه')' = سه$ (خاصة الارتداد Involution)

(٣) $سه \cap سه' = \varnothing$

(٤) $سه \cup سه' = ك$

(٥) $سه \subseteq ع \Leftarrow ع' \subseteq سه'$ (انظر التمرين المحلول ٩٢)

(٦) $(سه \cup ع)' = سه' \cap ع'$ (انظر التمرين المحلول ٩٣)

(٧) $(سه \cap ع)' = سه' \cup ع'$

وتسمى الخاصتان (٦) ، (٧) بقانوني دو مورغان De Morgan .

وبالإضافة الى العمليات الأساسية الثلاث السابقة يوجد عمليتان ثنائيتان هامتان على المجموعات هما الفرق بين مجموعتين والفرق التناظري لمجموعتين ولا تعتبر هاتان العمليتان من العمليات الأساسية لامكانية التعبير عنهما بدلالة العمليات الأساسية كما سنرى .

٤٠ – الفرق بين المجموعتين :

إذا كانت ك مجموعة طلاب السنة النهائية في الدراسة الثانوية

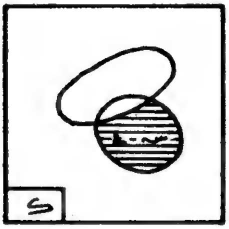
و س = { س : س طالب يلعب كرة السلة }

و ع = { س : س طالب يلعب كرة القدم }

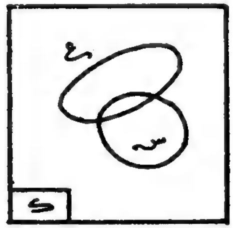
فالمجموعة المكونة من جميع الطلاب الذي يلعبون كرة السلة ولا يلعبون كرة القدم أي المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى س ولا تنتمي إلى ع تسمى **الفرق بين المجموعتين** س و ع أو **حاصل طرح المجموعة** ع **من المجموعة** س وبصورة عامة :

> **تعريف :** إذا كان س و ع جزئين لمجموعة ك فان مجموعة العناصر التي تنتمي إلى س ولا تنتمي إلى ع تسمى **فرق** س عن ع ويرمز لها بالرمز س – ع أو س / ع ويكون :
>
> س – ع = { س : (س ∈ س) ∧ (س ∉ ع) }

وإذا كان الشكل (٣١) يمثل المجموعتين س و ع فان الجزء المظلل في الشكل (٣٢) يمثل المجموعة س – ع .



الشكل (٣٢)



الشكل (٣١)

مثال (١) : اذا كانت **ك** مجموعة جميع الأشخاص

و سـ = {س : س شخص نحيف الجسم}

و ع = {س : س شخص طويل القامة}

فان سـ − ع = {س : س شخص نحيف الجسم وغير طويل}

و ع − سـ = {س : س شخص طويل القامة وغير نحيف}

مثال (٢) : إذا كانت سـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨}

و ع = {٣ ، ٥ ، ٧}

فان سـ − ع = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

مثال (٣) : لدينا صـ* = صـ − {٠}

مثال (٤) : إذا كانت ج مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية و ف مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية فان :

ط − ج = ف

٤١ — ملاحظة :

إن جدول الانتماء لعملية الفرق هو :

سـ	ع	سـ − ع
١	١	٠
١	٠	١
٠	١	٠
٠	٠	٠

٤٢ – خواص عملية الفرق : (انظر التمارين المحلولة ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠)

(١) سـ − ع ≠ ع − سـ (غير تبديلية)

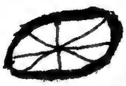
(٢) سـ − سـ = ∅

(٣) سـ − ∅ = سـ

(٤) ∅ − سـ = ∅

(٥) سـ − ك = ∅

(٦) سـ − ع ⊆ سـ



(٧) سـ − ع = سـ ∩ عَ

وتوضح الخاصة الأخيرة كيف يتعين حاصل طرح مجموعتين بالاعتماد على عمليتي التقاطع والاتمام .

٤٣ – الفرق التناظري :

لنعد إلى المجموعتين سـ و ع في المثال التمهيدي في الفقرة (٢٨) ونشكل فريقاً كل عضو فيه يلعب كرة اليد ولا يلعب كرة الطاولة أو يلعب كرة الطاولة ولا يلعب كرة السلة فنحصل بذلك على مجموعة من الرياضيين تسمى **الفرق التناظري للمجموعتين سـ و ع** .

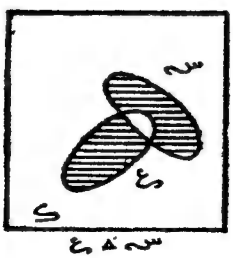
وواضح بالنسبة لهذه المجموعة أن كل عنصر فيهـا هو عنصر ينتمي إلى سـ ولا ينتمي إلى ع أو ينتمي إلى ع ولا ينتمي إلى سـ . ولا يوجد أي عنصر في المجموعة ينتمي إلى سـ و ع معاً . وبالعكس، إن كل عنصر ينتمي إلى سـ ولا ينتمي إلى ع أو ينتمي إلى ع ولا ينتمي إلى سـ فانه ينتمي إلى الفرق التناظري لـ سـ و ع ومنه :

تعريف : الفرق التناظري لمجموعتين سہ و عہ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى واحدة وواحدة فقط من المجموعتين سہ و عہ .

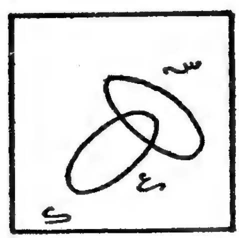
ويرمز لهذه المجموعة بالرمز سہ Δ عہ الذي يقرأ (سہ دلتا عہ) ويكون :

سہ Δ عہ = {س: (س ∈ سہ و س ∉ عہ) ∨ (س ∈ عہ و س ∉ سہ)}

واذا كان الشكل (٣٣) يمثل المجموعتين سہ و عہ فالجزء المظلل في الشكل (٣٤) يمثل الفرق التناظري سہ Δ عہ .



الشكل (٣٤)



الشكل (٣٣)

مثال (١) : إذا كان سہ = { أ ، ب ، ح ، د } و عہ = {ب ، د ، هـ }

فان : سہ Δ عہ = { أ ، ح ، هـ }

مثال (٢) : لدينا : $\text{ع}^{+} \Delta \text{ع}^{-} = \text{ع}^{*}$

مثال (٣) : إذا كانت ج_{1} مجموعة النقاط المحيطية لقرص دائري و ج_{2} مجموعة نقاطه الداخلية فإن :

$$\text{ج}_{1} \Delta \text{ج}_{2} = \text{ج}$$

حيث ج مجموعة جميع نقاط القرص .

٤٤ — **ملاحظة** : إن جدول الانتماء لعملية الفرق التناظري هو :

س	ع	س Δ ع
١	١	٠
١	٠	١
٠	١	١
٠	٠	٠

٤٥ – خواص عملية الفرق التناظري : تتمتع هذه العملية بالخواص التالية :

(انظر التمارين المحلولة ١٠٥ ، ١٠٦ ، ١٠٧ ، ١٠٨)

(١) س Δ ع = (س − ع) ∪ (ع − س)

(٢) س Δ ع = ع Δ س (الفرق التناظري عملية تبديلية)

(٣) س Δ ∅ = س

(٤) س Δ س = ∅

(٥) (س Δ ع) Δ ص = س Δ (ع Δ ص) (الفرق التناظري عملية قابلة للدمج) .

٤٦ – جبر المجموعات :

نلاحظ مما تقدم أن عمليات الاجتماع والتقاطع والمتممة تحقق الخواص الآتية :

١ – خاصتا اللانمو Indempotent :

س ∪ س = س ، س ∩ س = س

٢ – خاصتا الدمج :

(س ∪ ع) ∪ ص = س ∪ (ع ∪ ص)

(س ∩ ع) ∩ ص = س ∩ (ع ∩ ص)

$\text{س} \cup \text{ع} = \text{ع} \cup \text{س}$ ، $\text{س} \cap \text{ع} = \text{ع} \cap \text{س}$

٤ – خاصتا التوزيع :

$\text{س} \cup (\text{ع} \cap \text{ص}) = (\text{س} \cup \text{ع}) \cap (\text{س} \cup \text{ص})$

$\text{س} \cap (\text{ع} \cup \text{ص}) = (\text{س} \cap \text{ع}) \cup (\text{س} \cap \text{ص})$

٥ – خواص ك و ∅

$\text{س} \cup \emptyset = \text{س}$ ، $\text{س} \cap \text{ك} = \text{س}$

$\text{س} \cup \text{ك} = \text{ك}$ ، $\text{س} \cap \emptyset = \emptyset$

٦ – خواص المتممة :

$\text{س} \cup \text{س}' = \text{ك}$ ، $\text{س} \cap \text{س}' = \emptyset$

$(\text{س}')' = \text{س}$ ، $\text{ك}' = \emptyset$ ، $\emptyset' = \text{ك}$

٧ – خاصتا دو مورغان :

$(\text{س} \cup \text{ع})' = \text{س}' \cap \text{ع}'$

$(\text{س} \cap \text{ع})' = \text{س}' \cup \text{ع}'$

ونلاحظ في هذه الخواص :

أولا : عدم ظهور مفهومي (العنصر) و (الانتماء) .

ثانياً : أن هذه الخواص تكفي لاثبات صحة كثير من العلاقات بين المجموعات كما هي الحال في المثالين التاليين وفي بعض التمارين المحلولة في نهاية هذا الفصل .

وقد أوحت هاتان الملاحظتان بالكشف عن طريقة هامة لدراسة النظريات المتعلقة بالمجموعات ، وهذه الطريقة لا تعتمد على مفهومي (العنصر) و (الانتماء) اللذين كانا حجر الأساس عند عرض المفاهيم

الأساسية في نظرية المجموعات في الفقرات السابقة وإنما تقوم على القبول بأن مجموعة الأجزاء ج (ك) لأية مجموعة كلية ك تحقق الفرضيات الآتية:

(١) تخضع لعمليتين ثنائيتين هما الاجتماع والتقاطع تحققان الخواص من ١ إلى ٥ .

(٢) تخضع لعملية أحادية هي المتممة تحقق الخواص : ٦ و ٧ .

(٣) تُعرّف علاقة الاحتواء سـ ⊆ ع بالعلاقة سـ ∩ ع = سـ

تعتبر هذه الفرضيات المبادىء الاساسية التي يجب الاعتماد عليها في اثبات العلاقات المختلفة بين المجموعات . والموضوع الذي يدرس النظريات المتعلقة بالمجموعات حسب هذه الطريقة يسمى (جبر المجموعات) .

مثال (١) : برهن أن : سـ ∩ (سـ′ ∪ ع) = سـ ∩ ع

البرهان :

(١) حسب خاصة التوزيع لدينا :

سـ ∩ (سـ′ ∪ ع) = (سـ ∩ سـ′) ∪ (سـ ∩ ع)

(٢) وحسب خاصة المتممة لدينا :

سـ ∩ سـ′ = ∅

(٣) بالتعويض في (١) يكون :

سـ ∩ (سـ′ ∪ ع) = ∅ ∪ (سـ ∩ ع)

(٤) ولكن حسب خواص ∅ :

∅ ∪ (سـ ∩ ع) = سـ ∩ ع

(٥) وبالتعويض في (٣) يكون :

سـ ∩ (سـ′ ∪ ع) = سـ ∩ ع

مثال (٢) : برهن أن : $\text{سـ} \cap (\text{سـ} \cup \text{ع}) = \text{سـ}$

البرهان :

(١) حسب خاصة اللاغو لدينا :

$$\text{سـ} = \text{سـ} \cup \varnothing$$

(٢) بالتعويض في الطرف الأول من العلاقة المفروضة نجد :

$$\text{سـ} \cap (\text{سـ} \cup \text{ع}) = (\text{سـ} \cup \varnothing) \cap (\text{سـ} \cup \text{ع})$$

(٣) وحسب خاصة التوزيع يكون :

$$(\text{سـ} \cup \varnothing) \cap (\text{سـ} \cup \text{ع}) = \text{سـ} \cup (\varnothing \cap \text{ع})$$

(٤) وحسب خاصة $\varnothing$ لدينا :

$$\varnothing \cap \text{ع} = \varnothing$$

(٥) بالتعويض في (٣) في (٢) يكون :

$$\text{سـ} \cap (\text{سـ} \cup \text{ع}) = \text{سـ} \cup \varnothing$$

(٦) وحسب خاصة $\varnothing$ يكون :

$$\text{سـ} \cap (\text{سـ} \cup \text{ع}) = \text{سـ}$$

٤٧ – مبدأ الثِنَوِيّة (الازدواج) في جبر المجموعات :

إذا استعرضنا المتطابقات المذكورة في مطلع الفقرة السابقة وجدنا أن هذه المتطابقات تظهر أزواجاً أزواجاً ، وان احدى المتطابقتين في كل زوج تنتج عن الأحرى إما بالمبادلة بين الإشارتين $\cap$ و $\cup$ كما في الخواص ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ أو بالمبادلة بين الإشارتين $\cap$ و $\cup$ وبين المجموعتين ك و $\varnothing$ في حالة ظهورهما في العلاقة كما في الخواص ٥ ، ٦ .

وبصورة عامة نقبل انه اذا استبدلنا بالاشارات $\cup$ $\cap$ $\subseteq$ $\subset$ $\supseteq$

في متطابقة بين مجموعات ، الاشارات ∩ ∪ ⊇ ⊃ ⊋ ⊂ ⊃ ∅ ك على الترتيب فاننا نحصل على متطابقة جديدة تسمى (المطابقة الثنوية للأولى) أو اختصاراً (ثِنْوية المتطابقة الأولى) .

فثنوية المتطابقة : (سـ ∩ ك) ∪ (عـ ∩ ∅) = سـ

هي المتطابقة : (سـ ∪ ∅) ∩ (عـ ∪ ك) = سـ

كذلك نقبل انه اذا استبدلنـا بالاشارات ∪ ∩ ⊆ ⊂ ⊇ ⊃ في متطابقة بين مجموعات ، الاشارات ∩ ∪ ⊇ ⊃ ⊆ ⊂ على الترتيب وإذا استبدلنا بكل مجموعة متممتها فاننـا نحصل على متطابقة جديدة تسمى كذلك ثنوية المتطابقة الأولى .

فثنوية المتطابقة :

(سـ ∪ عـ) ∩ (سـ ∪ عـ') = سـ

هي المتطابقة :

(سـ' ∩ عـ') ∪ (سـ' ∩ عـ) = سـ'

مثال (١) : برهن أن : سـ ∪ (سـ' ∩ عـ) = سـ ∪ عـ

البرهان : ان هذه المتطابقة صحيحة لأنها ثنوية المتطابقة التي أثبتنا صحتها في المثال (١) في هذه الفقرة ..

مثال (٢) : برهن أن : سـ ∪ (سـ ∩ عـ) = سـ

البرهان : ان هذه المتطابقة صحيحة لأنها ثنوية المتطابقة التي أثبتنا صحتها في المثال (٢) في هذه الفقرة .

س كـ س' ∩ س ٤٧

تمارين محلولة

الاجتماع :

٦٣ – لدينا المجموعات :

أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ب = {٢ ، ٥} ، جـ = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦}

أوجد : أ ∪ ب ، أ ∪ جـ ، ب ∪ جـ ، أ ∪ ب ∪ جـ

الحل :

بتطبيق تعريف اجتماع مجموعتين نجد .

أ ∪ ب = {٢ ، ٤ ، ٦} ∪ {٢ ، ٥} = {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

أ ∪ جـ = {٢ ، ٤ ، ٦} ∪ {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦}

= {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

ب ∪ جـ = {٢ ، ٥} ∪ {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦} = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦}

وبالتدرج نجد :

أ ∪ ب ∪ جـ = (أ ∪ ب) ∪ جـ

= {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ∪ {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦}

= {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

٦٤ – إذا كانت سـ مجموعة قواسم العدد ٢٤ و ع مجموعة قواسم العدد ١٨ فعيّن سـ ∪ ع .

الحل :

لدينا : سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٢ ، ٢٤ }

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٨ }

ومنه سـ ∪ ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤ }

٦٥ – لدينا المجموعتان :

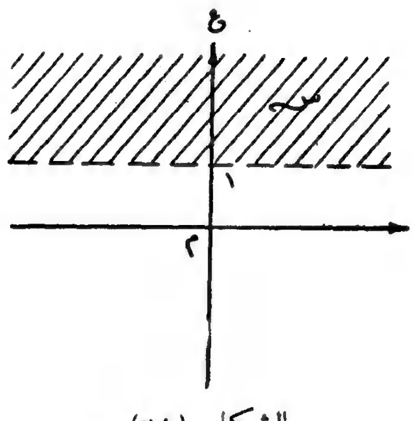
سـ = { (س ، ع) : س ، ع ∈ ح و ع > ١ }

ع = { (س ، ع) : س ، ع ∈ ح و س > ١ }

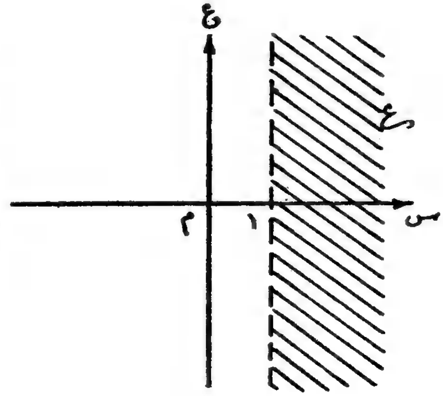
عيّن في مستوي المحورين الاحداثيين سـ ∪ ع . علماً بأن (س ، ع) نقطة احداثياها س ، ع في هذا المستوي .

الحل :

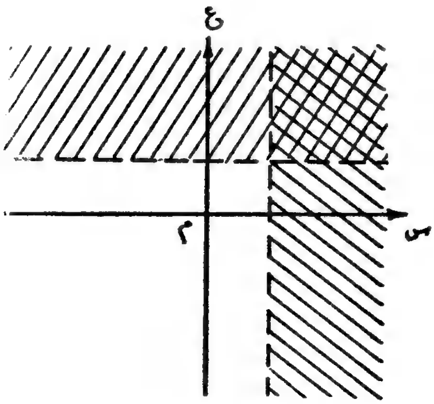
المنطقة المظللة في الشكل (٣٤) تمثل المجموعة سـ . لاحظ أن المستقيم ع = ١ الموازي لمحور السينات رسم متقطعاً لأن نقاطه لا تنتمي الى المجموعة سـ والمنطقة المظللة في الشكل (٣٥) تمثل المجموعة ع والمنطقة المظللة في الشكل (٣٦) تمثل المجموعة سـ ∪ ع .



الشكل (٣٤)

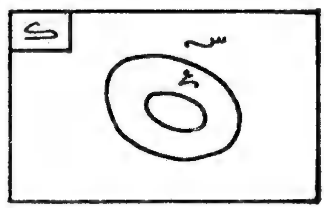


الشكل (٣٥)

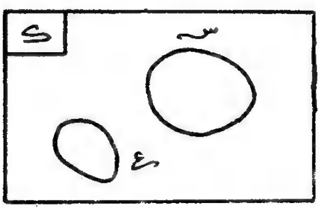


الشكل (٣٦)

٦٦ – في الشكلين (٣٧) (٣٨) ظلل س ∪ ع .



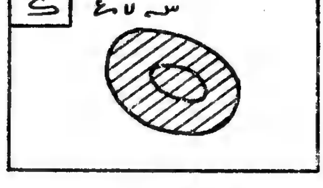
الشكل (٣٧)



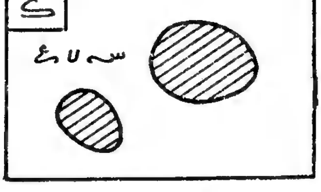
الشكل (٣٨)

الحـل :

نظلل الأقسام المشتركة (إن وجدت) وغير المشتركة بين مخططي س و ع فنحصل على الشكلين (٣٩) ، (٤٠) .



الشكل (٣٩)



الشكل (٤٠)

٦٧ – من أجل أية مجموعة سـ أثبت أن :

سـ ∪ سـ = سـ (خاصة اللانمو)

البرهان :

سـ ∪ سـ = {س : س ∈ سـ أو س ∈ سـ}

= {س : س ∈ سـ} = سـ

٦٨ – من أجل أية مجموعة سـ أثبت أن :

سـ ∪ ∅ = سـ (خاصة العنصر الحيادي)

البرهان : لدينا :

سـ ∪ ∅ = {س : س ∈ سـ أو س ∈ ∅} (تعريف الاجتماع)

= {س : س ∈ سـ} (لأن س ∉ ∅)

= سـ

٦٩ – إذا كانت سـ و ع مجموعتين فأثبت أن :

سـ ∪ ع = ع ∪ سـ (الخاصة التبديلية)

البرهان : طريقة أولى : لدينا :

سـ ∪ ع = {س : (س ∈ سـ) ∨ (س ∈ ع)} (تعريف الاجتماع)

= {س : (س ∈ ع) ∨ (س ∈ سـ)} (خاصة أو التبديلية)

= ع ∪ سـ (تعريف الاجتماع)

طريقة ثانية : نشكّل جدول الانتماء للاجتماعين سـ ∪ ع و ع ∪ سـ في جدول واحد هو الجدول :

سـ	ع	سـ ∪ ع	ع ∪ سـ
١	١	١	١
١	٠	١	١
٠	١	١	١
٠	٠	٠	٠

ونستنتج بملاحظة العمودين الأخيرين في هـــذا الجدول تحقق شرط تساوي المجموعتين سـ ∪ ع و ع ∪ سـ أي أن :

سـ ∪ ع = ع ∪ سـ

٧٠ – لتكن ك مجموعة كلية ، فأثبت من أجـل أي جزء سـ من ك أن :

سـ ∪ ك = ك

البرهان : لدينا :

سـ ∪ ك = {س : (س ∈ سـ) ∨ (س ∈ ك)} (تعريف الاجتماع)

وبما أن سـ ⊆ ك اذن : س ∈ سـ ⇐ س ∈ ك

وعليه : سـ ∪ ك = {س : س ∈ ك} = ك

٧١ – إذا كانت سـ ، ع ، صـ ثلاث مجموعات فأثبت أن :

(سـ ∪ ع) ∪ صـ = سـ ∪ (ع ∪ صـ) (خاصة قابلية الدمج لعملية الاجتماع)

البرهان : **طريقة أولى** : لدينا : (سـ ∪ ع) ∪ صـ

= {س : (س ∈ سـ ∪ ع) ∨ (س ∈ صـ)} (تعريف الاجتماع)

= {س : ((س ∈ سـ) ∨ (س ∈ ع)) ∨ (س ∈ صـ)} (تعريف الاجتماع)

= {س : (س ∈ سـ) ∨ ((س ∈ ع) ∨ (س ∈ صـ))}
(خاصة قابلية الدمج للربط بـ ∨)

= {س : (س ∈ سـ) ∨ (س ∈ ع ∪ صـ)} (تعريف الاجتماع)

= سـ ∪ (ع ∪ صـ) (تعريف الاجتماع)

طريقة ثانية : باستخدام جدول الانتماء الآتي :

سـ	ع	صـ	سـ ∪ ع	ع ∪ صـ	(سـ ∪ ع) ∪ صـ	سـ ∪ (ع ∪ صـ)
١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	١	١	١
١	٠	١	١	١	١	١
٠	١	١	١	١	١	١
١	٠	٠	١	٠	١	١
٠	١	٠	١	١	١	١
٠	٠	١	٠	١	١	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

وبملاحظة العمودين الأخيرين نستنتج صحة المساواة .

٧٢ – اذا كانت سـ و ع مجموعتين ما فأثبت أن :

١ – سـ ⊆ سـ ∪ ع   ٢ – ع ⊆ سـ ∪ ع

البرهان :

١ – من أجل أي عنصر س من سـ لدينا :

س ∈ سـ ⇐ س ∈ سـ ∪ ع   (تعريف الاجتماع)

ومنه سـ ⊆ سـ ∪ ع   (تعريف الاحتواء)

٢ – وبالمثل نجد من أجل أي عنصر س من ع لدينا :

س ∈ ع ⇐ س ∈ سـ ∪ ع   (تعريف الاجتماع)

ومنه ع ⊆ سـ ∪ ع   (تعريف الاحتواء)

٧٣ – لتكن سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات فإذا كان :

سـ ⊆ صـ و ع ⊆ صـ فأثبت أن :

سـ ∪ ع ⊆ صـ

البرهان :

من أجل كل عنصر س ∈ سـ ∪ ع يكون س ∈ سـ أو س ∈ ع (تعريف الاجتماع) .

وفي كلتا الحالتين يكون س ∈ صـ وذلك لأن سـ ⊆ صـ و ع ⊆ صـ (فرضاً) . وهكذا نجد أن :

س ∈ سـ ∪ ع ⇐ س ∈ صـ

ومعنى هذا أن سـ ∪ ع ⊆ صـ (تعريف الاحتواء)

٧٤ – اذا كانت سـ و ع مجموعتين ما فأثبت أن :

سـ ⊆ ع ⇔ سـ ∪ ع = ع

البرهان : طريقة أولى :

أولا : لنفرض أن سـ ⊆ ع ولنبرهن أن سـ ∪ ع = ع .

في الحقيقة ، لدينا :

سـ ∪ ع = {س : (س ∈ سـ) ∨ (س ∈ ع)} (تعريف الاجتماع)

وبملاحظة أن س ∈ سـ ⇐ س ∈ ع لأن سـ ⊆ ع (فرضاً)

يكون لدينا : سـ ∪ ع = {س : س ∈ ع} = ع

ثانيا : لنفرض بالعكس أن سـ ∪ ع = ع ولنثبت أن سـ ⊆ ع

في الحقيقة ، من أجل كل عنصر س ∈ سـ لدينا :

س ∈ سـ ⇐ س ∈ سـ ∪ ع (تعريف الاجتماع)

وبما أن س ∪ ع = ع

إذن س ∈ سـ ⇐ س ∈ ع

ومنه فان سـ ⊆ ع (تعريف الاحتواء)

طريقة ثانية :

أولا : لنفرض أن $س \subseteq ع$ ولنثبت أن $س \cup ع = ع$

في الحقيقة ، لدينا $س \subseteq ع$ (فرضاً)

ولدينا $ع \subseteq ع$

ومن هاتين العبارتين نجد : $س \cup ع \subseteq ع$ (التمرين ٧٣)

ومن المعلوم أن : $ع \subseteq س \cup ع$ (التمرين ٧٢)

ومن العبارتين الأخيرتين يكون $س \cup ع = ع$

ثانياً : لنفرض أن $س \cup ع = ع$ ولنثبت أن $س \subseteq ع$

في الحقيقة ، بما أن $س \cup ع = ع$ (فرضاً)

إذن $س \cup ع \subseteq ع$

ولكن $س \subseteq س \cup ع$ (التمرين ٧٢)

ومن العبارتين الأخيرتين نجد $س \subseteq ع$ (التمرين ٣٦)

التقاطع :

٧٥ – لدينا المجموعات :

$ا = \{١ ، ٢ ، ٤ ، ٦\}$ ، $ب = \{٤ ، ٦ ، ٨\}$ ، $حـ = \{٨ ، ١٠\}$

عيّن المجموعات : $ا \cap ب$ ، $ب \cap حـ$ ، $ا \cap حـ$ ، $ا \cap ب \cap حـ$

الحـل :

بتطبيق تعريف تقاطع المجموعات نجد :

$ا \cap ب = \{١ ، ٢ ، ٤ ، ٦\} \cap \{٤ ، ٦ ، ٨\} = \{٤ ، ٦\}$

$ب \cap حـ = \{٤ ، ٦ ، ٨\} \cap \{٨ ، ١٠\} = \{٨\}$

$ا \cap حـ = \{١ ، ٢ ، ٤ ، ٦\} \cap \{٨ ، ١٠\} = \{ \}$

$ا \cap ب \cap حـ = (ا \cap ب) \cap حـ = \{٤ ، ٦\} \cap \{٨ ، ١٠\} = \{ \}$

٧٦ - إذا كانت سـ مجموعة قواسم العدد ١٢ و ع مجموعة قواسم العدد ١٨ .

١ - ماذا تمثل المجموعة سـ ∩ ع

٢ - عيّن المجموعة سـ ∩ ع

الحل :

١ - بما أن سـ ∩ ع = مجموعة العناصر المشتركة بين سـ و ع فالمجموعة سـ ∩ ع هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين ١٢، ١٨

٢ - لدينا سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢}

ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٨}

ومنه سـ ∩ ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٦}

٧٧ - لتكن ك مجموعة جميع المثلثات في مستوٍ و سـ مجموعة جميع المثلثات المتساوية الساقين منها و ع مجموعة جميع المثلثات القائمة منها.

١ - عيّن المجموعة سـ ∩ ع

٢ - مثّل باستخدام مخططات فين المجموعات :

ك ، سـ ، ع ، سـ ∩ ع

الحل :

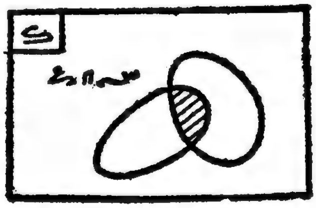
١ - لدينا : سـ = {س : س مثلث متساوي الساقين}

و ع = {س : س مثلث قائم الزاوية}

فالمجموعة سـ ∩ ع تتكون من المثلثات التي تنتمي إلى المجموعتين سـ و ع معاً ، فكل مثلث من هذه المثلثات يجب أن يكون متساوي الساقين وقائماً في آن واحد ومنه فإن :

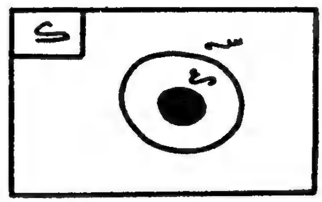
سـ ∩ ع = {س : س مثلث قائم متساوي الساقين}

٢ – بما أن المجموعة س ∩ ع ليست خالية كما رأينا فالمخطط المطلوب هو كما في الشكل (٤١) .

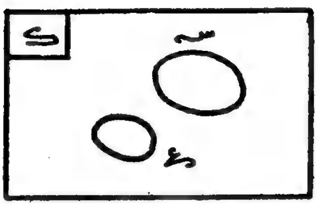


الشكل (٤١)

٧٨ – ظلل س ∩ ع في الشكلين (٤٢) (٤٣) .



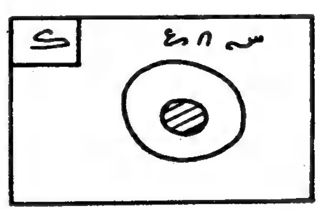
الشكل (٤٢)



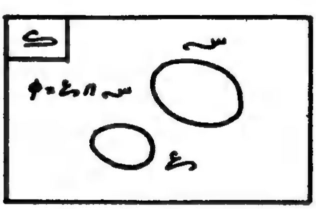
الشكل (٤٣)

الحـــل :

في الشكل (٤٢) مخطط ع يمثل القسم المشترك بين س و ع ، وبتظليل مخطط ع نحصل على مخطط س ∩ ع كما الشكل (٤٤) . أما في الشكل (٤٥) فلا يمكن تظليل س ∩ ع لأن س و ع



الشكل (٤٤)



الشكل (٤٥)

منفصلتان ، وبالتالي فان س ∩ ع = ∅ ونكتفي بالاشارة إلى ذلك على الشكل (٤٥) .

٧٩ – من أجل كل مجموعة سـ أثبت أن :

سـ ∩ سـ = سـ (خاصة اللانمو)

البرهان : لدينا :

سـ ∩ سـ = { س : (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ سـ) } (تعريف التقاطع)

= { س : س ∈ سـ } = سـ (خاصة ٣ صفحة ٢٠)

٨٠ – من أجل كل جزء سـ من مجموعة كلية ك أثبت :

سـ ∩ ك = سـ (خاصة العنصر الحيادي)

البرهان : لدينا :

سـ ∩ ك = { س : (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ك) } (تعريف التقاطع)

وبما أن سـ ⊆ ك فان (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ك) ⇔ س ∈ سـ

وعليه فان سـ ∩ ك = { س : س ∈ سـ } = سـ

٨١ – من أجل أي مجموعتين سـ و ع أثبت أن :

سـ ∩ ع = ع ∩ سـ (الخاصة التبديلية)

البرهان : **طريقة أولى** : لدينا :

سـ ∩ ع = { س : (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ع) } (تعريف التقاطع)

أو سـ ∩ ع = { س : (س ∈ ع) ∧ (س ∈ سـ) }

(الخاصة التبديلية للربط بـ ∧)

ومنه سـ ∩ ع = ع ∩ سـ

طريقة ثانية : نشكل جدول الانتماء للتقاطعين سـ ∩ ع و ع ∩ سـ

في جدول واحد هو الجدول :

سـ	ع	سـ ∩ ع	ع ∩ سـ
١	١	١	١
١	٠	٠	٠
٠	١	٠	٠
٠	٠	٠	٠
١	٢	٣	٤

(١، ٢) جدول المجموعتين سـ ، ع
(٣) جدول للتقاطع بناءً على ١ و٢
(٤) جدول التقاطع من ٢و١

وبالتدقيق في العمودين ٣ ، ٤ في هذا الجدول نستنتج تساوي المجموعتين سـ ∩ ع و ع ∩ سـ أي أن : سـ ∩ ع = ع ∩ سـ

٨٢ – إذا كانت سـ مجموعة ما فأثبت أن :

$$\text{سـ} \cap \varnothing = \varnothing$$

البرهان : لدينا :

$$\text{سـ} \cap \varnothing = \{\text{س} : (\text{س} \in \text{سـ}) \wedge (\text{س} \in \varnothing)\}$$

وبما أن ∅ هي المجموعة الخالية فليس بينها وبين سـ أي عنصر مشترك أي أن مجموعة العناصر المشتركة هي المجموعة الخالية أي أن :

$$\text{سـ} \cap \varnothing = \varnothing$$

٨٣ – إذا كانت سـ ، ع ، صـ فأثبت أن :

(سـ ∩ ع) ∩ صـ = سـ ∩ (ع ∩ صـ) (خاصة قابلية الدمج)

البرهان : لدينا : (سـ ∩ عـ) ∩ صـ

= { (س ∈ سـ ∩ عـ) ∧ (س ∈ صـ) } (تعريف التقاطع)

= { ((س ∈ سـ) ∧ (س ∈ عـ)) ∧ (س ∈ صـ) } (تعريف التقاطع)

= { (س ∈ سـ) ∧ ((س ∈ عـ) ∧ (س ∈ صـ)) }
(قابلية الدمج في عملية الربط بـ ∧)

= { (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ عـ ∩ صـ) } (تعريف التقاطع)

= سـ ∩ (عـ ∩ صـ) (تعريف التقاطع)

ملاحظة :

يمكن استخدام جدول الانتماء لاثبات صحة الخاصة السابقة كما في التمرين المحلول رقم ٧١ (حاول ذلك بنفسك)

٨٤ – إذا كانت سـ ، عـ ، صـ ثلاث مجموعات فأثبت أن :

(أ) سـ ∪ (عـ ∩ صـ) = (سـ ∪ عـ) ∩ (سـ ∪ صـ)
(خاصة قابلية توزيع الاجتماع على التقاطع)

(ب) سـ ∩ (عـ ∪ صـ) = (سـ ∩ عـ) ∪ (سـ ∩ صـ)
(خاصة قابلية توزيع التقاطع على الاجتماع)

(حـ) تحقق من صحة الخاصيتين (أ) ، (ب) من اجل المجموعات:

سـ = {٢ ، ٣ ، ٤} ، عـ = {٣ ، ٤ ، ٥} ، صـ = {٤ ، ٥ ، ٦}

الحل ·

(أ) لدينا : سـ ∪ (عـ ∩ صـ)

= { س : (س ∈ سـ) ∨ (س ∈ عـ ∩ صـ) }. (تعريف الاجتماع

= {س : (س ∈ سَ) ∨ ((س ∈ عَ) ∧ (س ∈ صَ))} (تعريف التقاطع)

= {س : [(س ∈ سَ) ∨ (س ∈ عَ)] ∧
[(س ∈ سَ) ∨ (س ∈ صَ)]
(قابلية توزيع الربط بـ ∨ على الربط بـ ∧)

= {س : (س ∈ سَ ∪ عَ) ∧ (س ∈ سَ ∪ صَ)} (تعريف الاجتماع)

= {س : س ∈ (سَ ∪ عَ) ∩ (سَ ∪ صَ)} (تعريف التقاطع)

= (سَ ∪ عَ) ∩ (سَ ∪ صَ)

(ب) لدينا : سَ ∩ (عَ ∪ صَ)

= {س : (س ∈ سَ) ∧ (س ∈ عَ ∪ صَ)} (تعريف التقاطع)

= {س : (س ∈ سَ) ∧ ((س ∈ عَ) ∨ (س ∈ صَ))} (تعريف الاجتماع)

= {س : [(س ∈ سَ) ∧ (س ∈ عَ)] ∨
[(س ∈ سَ) ∧ (س ∈ صَ)]
(قابلية توزيع الربط بـ ∧ على الربط بـ ∨)

= {س : (س ∈ سَ ∩ عَ) ∨ (س ∈ سَ ∩ صَ)} (تعريف التقاطع)

= {س : س ∈ (سَ ∩ عَ) ∪ (سَ ∩ صَ)} (تعريف الاجتماع)

= (سَ ∩ عَ) ∪ (سَ ∩ صَ)

(حـ) من اجل تحقق الخاصة الأولى لدينا :

عَ ∩ صَ = {٣، ٤، ٥} ∩ {٤، ٥، ٦}
= {٤، ٥}

و سَ ∪ (عَ ∩ صَ) = {٢، ٣، ٤} ∪ {٤، ٥}
= {٢، ٣، ٤، ٥} (١)

ولدينا سـ ∪ ع = {٢، ٣، ٤} ∪ {٤، ٥، ٦} = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

و سـ ∪ صـ = {٢، ٣، ٤} ∪ {٤، ٥} = {٢، ٣، ٤، ٥}

ومنه (سـ ∪ ع) ∩ (سـ ∪ صـ) = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ∩ {٢، ٣، ٤، ٥}

= {٢، ٣، ٤، ٥} (٢)

وبمقارنة (١) ، (٢) نجد أن الخاصة الأولى محققة .

ومن اجل تحقق الخاصة الثانية لدينا :

ع ∪ صـ = {٣، ٤، ٥} ∪ {٤، ٥، ٦} = {٣، ٤، ٥، ٦}

ومنه سـ ∩ (ع ∪ صـ) = {٢، ٣، ٤} ∩ {٣، ٤، ٥، ٦}

= {٣، ٤} (١)'

ولدينا أيضاً : سـ ∩ ع = {٢، ٣، ٤} ∩ {٣، ٤، ٥} = {٣، ٤}

و سـ ∩ صـ = {٢، ٣، ٤} ∩ {٤، ٥، ٦} = {٤}

ومنه (سـ ∩ ع) ∪ (سـ ∩ صـ) = {٣، ٤} ∪ {٤} = {٣، ٤} (٢)'

وبمقارنة (١)' ، (٢)' نجد أن الخاصة الثانية محققة .

٨٥ – اذا كانت سـ و ع مجموعتين ما فأثبت أن :

(١) سـ ∩ ع ⊆ سـ (٢) سـ ∩ ع ⊆ ع

البرهان :

من أجل أي عنصر س ∈ سـ ∩ ع لدينا :

س ∈ سـ ∩ ع ⇐ س ∈ سـ و س ∈ ع

وينتج من ذلك نتيجتان :

(١) س ∈ سـ ∩ ع ⇐ س ∈ سـ وهذا يكافيء :

سـ ∩ ع ⊆ سـ وهو المطلوب الأول

(٢) س ∈ سـ ∩ ع ⇐ س ∈ ع   وهذا يكافيء :
سـ ∩ ع ⊆ ع   وهو المطلوب الثاني

٨٦ - إذا كانت سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات وكان :
صـ ⊆ سـ و صـ ⊆ ع   فأثبت أن : صـ ⊆ سـ ∩ ع

البرهان : من أجل كل عنصر س ∈ صـ لدينا :
س ∈ صـ ⇐ س ∈ سـ و س ∈ ع
لأن صـ ⊆ سـ و صـ ⊆ ع   فرضاً
ومنه س ∈ صـ ⇐ س ∈ سـ ∩ ع (تعريف التقاطع)
ومنه صـ ⊆ سـ ∩ ع   (تعريف الاحتواء)

٨٧ - اذا كانت سـ و ع مجموعتين ما فأثبت أن :
سـ ⊆ ع ⇔ سـ ∩ ع = سـ

البرهان : طريقة أولى .

أولاً : لنفرض أن سـ ⊆ ع ولنثبت أن سـ ∩ ع = سـ
لدينا سـ ∩ ع ⊆ سـ (١)   (التمرين ٨٥)
وبما أن سـ ⊆ ع فانه :

∀ س ∈ سـ ⇐ (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ع) ⇐ س ∈ سـ ∩ ع

ومنه فإن سـ ⊆ سـ ∩ ع (٢)
ومن (١) و (٢) ينتج أن سـ ∩ ع = سـ

ثانياً : لنفرض بالعكس أن سـ ∩ ع = سـ ولنبرهن
أن سـ ⊆ ع

في الحقيقة ، من أجل كل عنصر س ∈ سـ لدينا :
س ∈ سـ ⇐ س ∈ سـ ∩ ع
وذلك لأن سـ = سـ ∩ ع (فرضاً)

ومنه س ∈ سـ . ⇐ س ∈ سـ و س ∈ ع (تعريف التقاطع)

ومنه س ∈ سـ ⇐ س ∈ ع

ومنه سـ ⊇ ع (تعريف الاحتواء)

طريقة ثانية :

أولاً . لنفرض أن سـ ⊇ خ ولنثبت أن سـ ∩ ع = سـ

في الحقيقة ، لدينا سـ ⊇ ع (فرضاً)

و سـ ⊇ سـ

ومن هاتين العبارتين نجد : سـ ⊇ سـ ∩ ع (التمرين ٨٦)

ولكن من المعلوم أن : سـ ∩ ع ⊇ سـ (التمرين ٨٥)

ومن هاتين العبارتين نجد : سـ ∩ ع = سـ

ثانياً : لنفرض أن سـ ∩ ع = سـ ولنبرهن أن سـ ⊇ ع

في الحقيقة ، بما أن سـ ∩ ع = سـ

اذن سـ ⊇ سـ ∩ ع

ولكن سـ ∩ ع ⊇ ع (التمرين ٨٥)

ومن العبارتين الأخيرتين نستنتج أن :

سـ ⊇ ع (التمرين ٣٦)

٨٨ – أثبت أن :

ع ∪ سـ ⊇ صـ ∪ سـ (١)

و ع ∩ سـ ⊇ صـ ∩ سـ (٢)

} ⇐ ع ⊇ صـ

البرهان : من أجل كل عنصر س ∈ ع لدينا :

س ∈ ع ⇐ س ∈ ع ∪ سـ (تعريف الاجتماع)

⇐ س ∈ صـ ∪ سـ (اعتماداً على (١))

ولكن :

س ∈ صـ ∪ سـ ⇐ { س ∈ صـ فقط
أو س ∈ صـ و سـ ⇐ س ∈ صـ
أو س ∈ سـ }

ومن الحالة الأخيرة يكون س ∈ ع ∩ سـ لأن س ∈ ع أصلاً

ومنه ينتج س ∈ صـ ∩ سـ (اعتماداً على (٢)) وهذا يؤدي الى س ∈ صـ . وفي جميع الحالات نلاحظ أن :

س ∈ ع ⇐ س ∈ صـ

أي أن ع ⊆ صـ

المتممة :

٨٩ - أوجد سـَ في الحالات الآتية :

(١) ك = { ا ، ب ، حـ ، ء } و سـ = { ب ، حـ }

(٢) ك = { ٢ ، ٤ ، ٦ } و سـ = {٤}

(٣) ك = مجموعة الأشكال الرباعية في مستوٍ

سـ = مجموعة المربعات في هذا المستوي .

(٤) ك = مجموعة الأعداد الطبيعية

سـ = { س : س = ٢ ب و ب ∈ ط }

الحل :

حسب تعريف المتممة يكون :

سـَ = { س : (س ∈ ك) ∧ (س ∉ سـ) }

وعليه نجد :

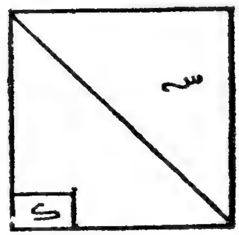
(١) سـَ = { ا ، ء }

(٢) سَ = {٢ ، ٦}

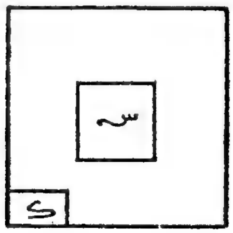
(٣) سَ = {س : س شكل رباعي ليس مربعاً}

(٤) سَ = {س : س = ٢ح + ١ ، ح ∈ ط}

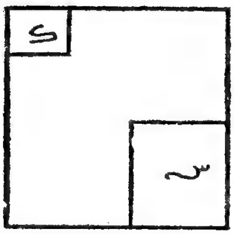
٩٠ – ظلل سَ في الأشكال الآتية :



الشكل (٤٦)



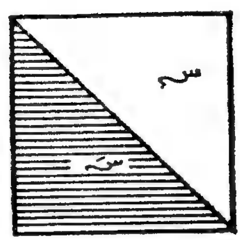
الشكل (٤٧)



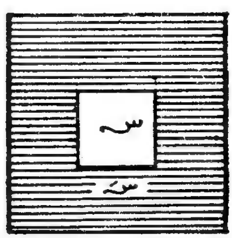
الشكل (٤٨)

الحل :

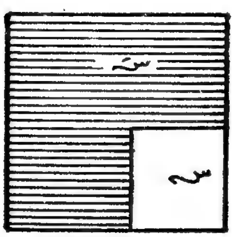
نظلل الجزء الباقي من ك فنحصل على الأشكال :



الشكل (٤٩)



الشكل (٥٠)



الشكل (٥١)

٩١ – إذا كانت ك = {أ ، ب ، ح} فأوجد متممات جميع أجزاء ك .

الحل :

إن مجموعة أجزاء ك هي :

ج (ك) = { ∅ ، ك ، {أ} ، {ب} ، {حـ} ، {أ ، ب}
{ {أ ، حـ} ، {ب ، حـ} }

ومتممات هذه الأجزاء هي :

∅ = ك ، ك' = ∅

{أ}' = {ب ، حـ} ، {ب}' = {أ ، حـ} ،

{حـ}' = {أ ، ب}

{أ ، ب}' = {حـ} ، {أ ، حـ}' = {ب} ، {ب ، حـ}' = {أ}

٩٢ – أثبت أن : س ⊆ ع ⇐ ع' ⊆ س'

البرهان : من أجل كل عنصر س ∈ ع' لدينا :

س ∈ ع' ⇐ س ∉ ع (١) (تعريف المتممة)

وبما أن س ⊆ ع فرضا فإن س ∈ ع' ⇐ س ∉ س

ومنه ينتج أن (١) تصبح :

س ∈ ع' ⇐ س ∉ س

أو س ∈ ع' ⇐ س ∈ س' (تعريف المتممة)

ومنه ع' ⊆ س'

٩٣ – إذا كان س و ع جزئين من مجموعة كلية ك فأثبت أن :

(أ) (س ∪ ع)' = س' ∩ ع'

(ب) (س ∩ ع)' = س' ∪ ع' (قانون دو مورغان)

البرهان :

(أ) لنبرهن أولاً أن (س ∪ ع)' ⊆ س' ∩ ع' (١)

في الحقيقة ، لدينا :

س ∈ (س ∪ ع)' ⇐ (س ∈ ك) ∧ (س ∉ س ∪ ع) (تعريف المتممة)

⇐ (س ∉ سـ) ∧ (س ∉ ع) (الفقرة ٢٩)

⇐ (س ∈ سـ') ∧ (س ∈ ع') (تعريف المتممة)

⇐ س ∈ سـ' ∩ ع'

ثم لنبرهن أن : سـ' ∩ ع' ⊇ (سـ ∪ ع)' (٢)

في الحقيقة لدينا :

س ∈ سـ' ∩ ع' ⇐ (س ∈ سـ') ∧ (س ∈ ع') (تعريف التقاطع)

⇐ (س ∉ سـ) ∧ (س ∉ ع)

⇐ س ∉ سـ ∪ ع (الفقرة (٢٩))

⇐ س ∈ (سـ ∪ ع)' (تعريف المتممة)

ومن (١) و (٢) تحقق المساواة (أ) .

(ب) نتبع الاسلوب ذاته الذي استعملناه لإثبات (أ) .

٩٤ – إذا كانت ك = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} و أ = {٣ ، ٥ ، ٧}
و ب = {١ ، ٥ ، ٩} أوجد :

(١) أ' (٢) ب' (٣) أ' ∪ ب' (٤) أ' ∩ ب'
(٥) (أ ∪ ب)' (٦) (أ ∩ ب)' .

ماذا تستنتج من مقارنة نتيجتي (٣) و (٦) ومن مقارنة نتيجتي (٤) و (٥) .

الحل :

(١) أ' تتكون من عناصر ك التي لا تنتمي إلى أ أي أ' = {١ ، ٩}
(٢) ب' تتكون من عناصر ك التي لا تنتمي إلى ب أي ب' = {٣ ، ٧}
(٣) أ' ∪ ب' = {١ ، ٩ ، ٣ ، ٧}
(٤) أ' ∩ ب' = ∅
(٥) أ ∪ ب = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ١ ، ٩} ومنه (أ ∪ ب)' = ∅

(٦) أ ∩ ب = {٥} ومنه (أ ∩ ب)' = {١، ٣، ٩، ٧}

بمقارنة نتيجتي (٣) و (٦) نجد : (أ ∩ ب)' = أ' ∪ ب'

وبمقارنة نتيجتي (٤) و (٥) نجد : (أ ∪ ب)' = أ' ∩ ب' أي

أن المجموعتين أ و ب تحققان قانوني دو مورغان .

٩٥ – أثبت أن : سـ ∩ (سـ ∪ ع)' = ∅ .

البرهان : لدينا على التوالي :

سـ ∩ (سـ ∪ ع)' = سـ ∩ (سـ' ∩ ع') (قانون دو مورغان)

= (سـ ∩ سـ') ∩ ع' (خاصة الدمج)

= ∅ ∩ ع' (الخاصة ٣ الفقرة ٣٩)

= ∅ (الخاصة ٤ الفقرة ٣٥)

٩٦ – إذا كان سـ ∩ ع = ∅ فأثبت أن سـ ⊆ ع' .

البرهان : من أجل كل عنصر س ∈ سـ

لدينا : س ∈ سـ ⇐ س ∉ ع لأن سـ ∩ ع = ∅ فرضاً

ولكن : س ∉ ع ⟺ س ∈ ع'

وعليه فإن : س ∈ سـ ⇐ س ∈ ع'

وهذا يكافىء : سـ ⊆ ع'

الفرق :

٩٧ – عيّن المجموعتين أ – ب و ب – أ في كل من الحالات الآتية

(١) أ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

ب = {٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}

(٢) أ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ، ب = {٣، ٤}

(٣) ﺃ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} ب = {٢}

(٤) ﺃ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} ب = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

(٥) ﺃ = {٢ ، ٤} ب = { }

(٦) ﺃ = ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) ب = ع (مجموعة الأعداد العادية)

الحل :

إن المجموعة ﺃ – ب هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى ﺃ ولا تنتمي إلى ب .

وإن المجموعة ب – ﺃ هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى ب ولا تنتمي إلى ﺃ . وعلى ذلك نجد :

(١) ﺃ – ب = {١ ، ٢ ، ٣} ، ب – ﺃ = {٧ ، ٨ ، ٩}

(٢) ﺃ – ب = {١ ، ٢ ، ٥} ، ب – ﺃ = $\varnothing$

(٣) ﺃ – ب = {٤ ، ٦ ، ٨} ، ب – ﺃ = $\varnothing$

(٤) ﺃ – ب = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} ، ب – ﺃ = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

(٥) ﺃ – ب = {٢ ، ٤} ، ب – ﺃ = { }

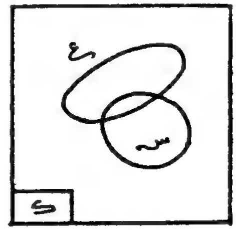
(٦) ﺃ – ب = ح – ع = مجموعة الأعداد غير العادية

ب – ﺃ = ع – ح = $\varnothing$ لعدم وجود عدد عادي غير حقيقي .

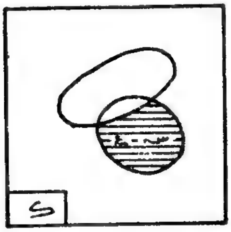
٩٨ – بيّن باستخدام المخططات أن س – ع ≠ ع – س بصورة عامة . هل يساعد التمرين السابق على توضيح هذه الخاصة .

الحل :

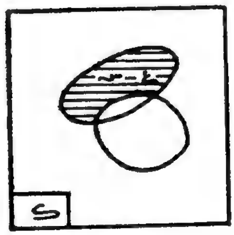
الشكل (٥٢) يمثل المجموعتين س و ع والشكل (٥٣) يمثل المجموعة س – ع والشكل (٥٤) يمثل المجموعة ع – س ويتضح من الشكلين الأخيرين أن س – ع ≠ ع – س



الشكل (٥٢)



الشكل (٥٣)



الشكل (٥٤)

وباستعراض نتائج التمرين السابق نلاحظ أيضاً أن أ − ب ≠ ب − أ في جميع الحالات .

٩٩ – اذا كان س و ع جزئين من مجموعة ك فأثبت أن :

$$س - ع = س \cap ع'$$

البرهان :

لدينا : $س - ع = \{ س : (س \in س) \wedge (س \notin ع) \}$
(تعريف)

ولكن : $س \notin ع \Leftrightarrow س \in ع'$

ومنه : $س - ع = \{ س : (س \in س) \wedge (س \in ع') \}$

اذن : $س - ع = س \cap ع'$ (تعريف التقاطع)

١٠٠ – من أجل أية مجموعة جزئية س لمجموعة ك أثبت أن :

(١) $س - س = \emptyset$ (٢) $س - \emptyset = س$

(٣) ∅ - سـ = ∅   (٤) سـ - ك = ∅

(٥) سـ - ع ⊆ سـ   (حيث ع ⊆ ك)

البرهان :

(١) لدينا سـ - سـ = سـ ∩ سـ'   (خاصة ٧ ، فقرة ٤٢)

ومنه سـ - سـ = ∅   (خاصة ٣ ، فقرة ٣٩)

(٢) لدينا سـ - ∅ = سـ ∩ ∅'   (خاصة ٧ ، فقرة ٤٢)

= سـ ∩ ك   (خاصة ١ ، فقرة ٣٩)

= سـ   (خاصة ٢ ، فقرة ٣٥)

(٣) لدينا ∅ - سـ = ∅ ∩ سـ'   (خاصة ٧ ، فقرة ٤٢)

= ∅   (خاصة ٤ ، فقرة ٣٥)

(٤) لدينا سـ - ك = سـ ∩ ك'   (خاصة ٧ ، فقرة ٤٢)

= سـ ∩ ∅   (خاصة ١ ، فقرة ٣٩)

= ∅   (خاصة ٤ ، فقرة ٣٥)

(٥) لدينا سـ - ع = سـ ∩ ع'   (خاصة ٧ ، فقرة ٤٢)

ولكن سـ ∩ ع' ⊆ سـ   (التمرين ٨٥)

ومنه سـ - ع ⊆ سـ

١ - أثبت أن سـ ∪ ع = (سـ - ع) ∪ ع

البرهان :

لدينا (سـ - ع) ∪ ع = (سـ ∩ ع') ∪ ع   (الخاصة ٧ ، الفقرة ٤٢)

= (سـ ∪ ع) ∩ (ع' ∪ ع)   (الخاصة التوزيعية)

= (سـ ∪ ع) ∩ ك   (الخاصة ٤ ، الفقرة ٣٩)

= سـ ∪ ع   (الخاصة ٢ ، الفقرة ٣٥)

١٠٢ – أثبت أن ع ⊆ سـ ⟺ (سـ − ع) ∪ ع = سـ

البرهان :

لدينا (سـ − ع) ∪ ع = سـ ∪ ع حسب المسألة السابقة

ولكن (سـ ∪ ع = سـ) ⟺ ع ⊆ سـ

(التمرين ٧٤)

إذن : (سـ − ع) ∪ ع = سـ ⟺ ع ⊆ سـ

الفرق التناظري :

١٠٣ – عيّن المجموعة سـ Δ ع في الحالات الآتية :

(١) سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ع = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

(٢) سـ = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧} ، ع = {١ ، ٧}

(٣) سـ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ع = {١ ، ٣ ، ٥}

(٤) سـ = }٢ ، ٥ ، ٧} ، ع = { }

(٥) سـ = ∅ ، ع = {٢}

الحـل :

بتطبيق تعريف سـ Δ ع في كل حالة نجد :

(١) سـ Δ ع = {١ ، ٢ ، ٥ ، ٦}

(٢) سـ Δ ع = {٣ ، ٥}

(٣) سـ Δ ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

(٤) سـ Δ ع = {٢ ، ٥ ، ٧}

(٥) سـ Δ ع = {٢}

١٠٤ – إذا كانت ك مجموعة المثلثات في مستو . و سـ = {س : س مثلث متساوي الساقين} . ع = {س : س مثلث قائم} . مم تتكون المجموعة سـ Δ ع .

الحل :

حسب التعريف لدينا :

سـ Δ ع = {س : (س $\in$ سـ و س $\notin$ ع) $\vee$ (س $\in$ ع و س $\notin$ سـ)}

ومنه : سـ Δ ع = {س : س مثلث متساوي الساقين غير قائم أو مثلث قائم غير متساوي الساقين} .

١٠٥ – أثبت أن سـ Δ ع = (سـ – ع) $\cup$ (ع – سـ)

البرهان : بانشاء جدول الانتماء الآتي :

سـ	ع	سـ Δ ع	سـ – ع	ع – سـ	(سـ–ع) $\cup$ (ع–سـ)
١	١	٠	٠	٠	٠
١	٠	١	١	٠	١
٠	١	١	٠	١	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	٢	٣	٤	٥	٦
جدول المجموعتين المفروضتين		جدول الفرق التناظري بناءً على ١ ، ٢	جدول الفرق بناء على ١ ، ٢	جدول الفرق بناء على ٢ ، ١	جدول الاجتماع بناءً على ٤ ، ٥

وبمقارنة العمودين ٣ ، ٦ يثبت لدينا أن للمجموعتين

س Δ ع و (س − ع) ∪ (ع − س)

العناصر نفسها .

١٠٦ – أثبت أن س Δ ع = ع Δ س

البرهان :

سينا : س Δ ع = (س − ع) ∪ (ع − س)
(الخاصة ١ ، الفقرة ٤٥)

أو س Δ ع = (ع − س) ∪ (س − ع)
(الخاصة التبديلية للاجتماع)

= ع Δ س (الخاصة ١ ، الفقرة ٤٥)

١٠٧ – من أجل أية مجموعة جزئية س من مجموعة ك أثبت أن :

(١) س Δ ∅ = س ، (٢) س Δ س = ∅

البرهان :

(١) س Δ ∅ = (س − ∅) ∪ (∅ − س)
(الخاصة ١ ، الفقرة ٤٥)

= س ∪ ∅ (الخاصتان ٣ و ٤ ، الفقرة ٤٢)

= س

(٢) س Δ س = (س − س) ∪ (س − س)
(الخاصة ١ ، الفقرة ٤٥)

= ∅ ∪ ∅ (الخاصة ٢ ، الفقرة ٤٢)

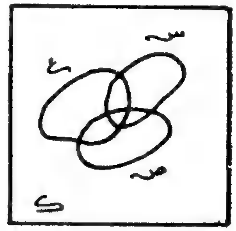
= ∅

١٠٨ – إذا كانت س ، ع ، ص ثلاثة مجموعات جزئية من مجموعة ك ، فأثبت أن :

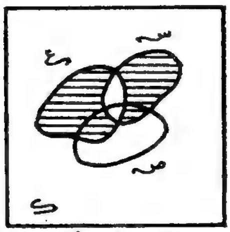
(س Δ ع) Δ ص = س Δ (ع Δ ص)

(خاصة قابلية الدمج)

البرهان : يمكننا التحقق من صحة العبارة المفروضة باستخدام المخططات ، نأخذ المجموعات س ، ع ، ص الممثلة بالشكل (٥٥) .

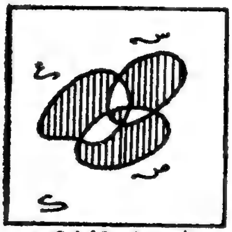


الشكل (٥٥)



س Δ ع

الشكل (٥٦)

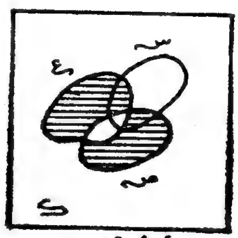


(س Δ ع) Δ ص

الشكل (٥٧)

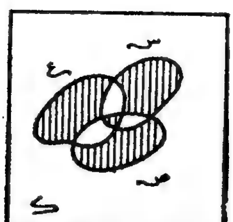
ننشىء س Δ ع كما في الشكل (٥٦) ، ثم ننشيء الفرق التناظري لـ س Δ ع و ص أي أننا نظلل العناصر التي تنتمي لـ س Δ ع ولا تنتمي لـ ص والعناصر التي تنتمي لـ ص ولا تنتمي لـ س Δ ع فنحصل على الشكل (٥٧) .

وبنفس الطريقة نعيّن أولاً المجموعة ع Δ ص كما في الشكل (٥٨) ثم نعيّن الفرق التناظري للمجموعتين س و ع Δ ص كما في الشكل (٥٩)



ع Δ ص

الشكل (٥٨)



س Δ (ع Δ ص)

الشكل (٥٩)

وبمقارنة الشكلين (٥٧) (٥٩) تتحقق صحة المساواة المفروضة ويمكن اثباتها بصورة عامة كما يلي :

طريقة أولى : نشكل جدول الانتماء الآتي :

سـ	عـ	صـ	سـ Δ عـ	(سـ Δ عـ) Δ صـ	عـ Δ صـ	سـ Δ (عـ Δ صـ)
١	١	١	٠	١	٠	١
١	١	٠	٠	٠	١	٠
١	٠	١	١	٠	١	٠
١	٠	٠	١	١	٠	١
٠	١	١	١	٠	٠	٠
٠	١	٠	١	١	١	١
٠	٠	١	٠	١	١	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
جدول المجموعات المفروضة			الفرق التناظري من ١ ، ٢	الفرق التناظري من ٤ ، ٣	الفرق التناظري من ٢ ، ٣	الفرق التناظري من ١ ، ٦

وبمقارنة العمودين ٥ ، ٧ ينتج المطلوب .

طريقة ثانية : **أولا :** ∀ س ∈ (سـ Δ عـ) Δ صـ لدينا :

س ∈ (سـ Δ عـ) Δ صـ ⇐ { (١) س ∈ سـ Δ عـ و س ∉ صـ
(٢) س ∉ سـ Δ عـ و س ∈ صـ }

ولكن :

(١) ⇐ { س ∈ سـ و س ∉ عـ و س ∉ صـ
س ∉ سـ و س ∈ عـ و س ∉ صـ }

و (٢) ⇐ { س ∈ سـ و س ∈ ع و س ∈ صـ
س ∉ سـ و س ∉ ع و س ∈ صـ }

ثانياً : ∀ س ∈ سـ Δ (ع Δ صـ) لدينا :

س ∈ سـ Δ (ع Δ صـ) ⇐ { (١) س ∈ سـ و س ∉ ع Δ صـ
(٢) س ∉ سـ و س ∈ ع Δ صـ }

ولكن :

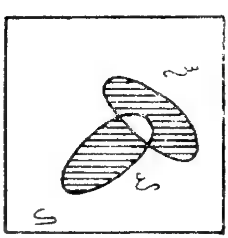
(١) ⇐ { س ∈ سـ و س ∈ ع و س ∈ صـ
س ∈ سـ و س ∉ ع و س ∉ صـ }

و (٢) ⇐ { س ∉ سـ و س ∈ ع و س ∉ صـ
س ∉ سـ و س ∉ ع و س ∈ صـ }

وبمقارنة نتائج (أولاً) و (ثانياً) نلاحظ ان المجموعتين (سـ Δ ع) Δ صـ و سـ Δ (ع Δ صـ) العناصر نفسها .

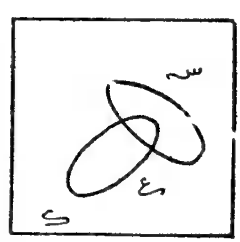
١٠٩ – أثبت أن سـ Δ ع = (سـ ∪ ع) – (ع ∩ سـ)

البرهان : يمكننا أن نتحقق من صحة العبارة السابقة باستخدام المخططات . نأخذ المجموعتين سـ و ع الممثلتين بالشكل (٦٠) .

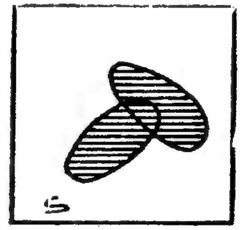


الشكل (٦١)

سـ Δ ع

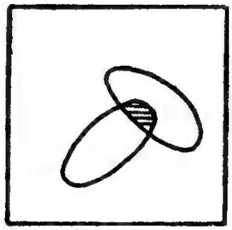


الشكل (٦٠)



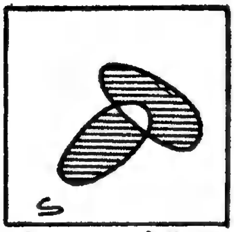
س ∪ ع

الشكل (٦٢)



س ∩ ع

الشكل (٦٣)



س ∪ ع − س ∩ ع

الشكل (٦٤)

وننشىء مخطط س Δ ع كما في الشكل (٦١) ثم ننشىء مخطط س ∪ ع في الشكل (٦٢) ومخطط س ∩ ع في الشكل (٦٣) ثم مخطط (س ∪ ع)− (س ∩ ع) في الشكل (٦٤) وبالنظر في الشكلين (٦١) (٦٤) نتأكد من صحة العبارة المفروضة . ويمكن اثباتها بصورة عامة كما يلي :

طريقة أولى : نشكل جدول الانتماء الآتي :

س	ع	س Δ ع	س ∪ ع	س ∩ ع	س ∪ ع−س ∩ ع
١	١	٠	١	١	٠
١	٠	١	١	٠	١
٠	١	١	١	٠	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	٢	٣	٤	٥	٦
جدول المجموعتين المفروضتين		"فرق التناظري من ١، ٢	الاجتماع من ١، ٢	التقاطع من ١، ٢	الفرق من ٤، ٥

وبمقارنة العمودين (٣) ، (٦) ينتج المطلوب .

طريقة ثانية :

لدينا :

$$\text{سـ} \cup \text{ع} - \text{ع} \cap \text{سـ} = (\text{سـ} \cup \text{ع}) \cap (\text{ع} \cap \text{سـ})'$$

(الخاصة ٧ ، الفقرة ٤٢)

$$= (\text{سـ} \cup \text{ع}) \cap (\text{ع}' \cup \text{سـ}')$$

(دو مورغان ، الفقرة ٣٩)

$$= [(\text{سـ} \cup \text{ع}) \cap \text{ع}'] \cup [(\text{سـ} \cup \text{ع}) \cap \text{سـ}']$$

(قابلية توزيع التقاطع على الاجتماع)

$$= [(\text{سـ} \cap \text{ع}') \cup (\text{ع} \cap \text{ع}')] \cup [(\text{سـ} \cap \text{سـ}') \cup (\text{ع} \cap \text{سـ}')]$$

(قابلية توزيع التقاطع على الاجتماع)

$$= [(\text{سـ} \cap \text{ع}') \cup \varnothing] \cup [\varnothing \cup (\text{ع} \cap \text{سـ}')]$$

(الخاصة ٣ ، الفقرة ٣٩)

$$= (\text{سـ} \cap \text{ع}') \cup (\text{ع} \cap \text{سـ}')$$

(الخاصة ٢ ، الفقرة ٣١)

$$= (\text{سـ} - \text{ع}) \cup (\text{ع} - \text{سـ})$$

(الخاصة ٧ ، الفقرة ٤٢)

$$= \text{سـ} \,\Delta\, \text{ع}$$

(الخاصة ١ ، الفقرة ٤٥)

جبر المجموعات ومبدأ الثنوية :

١١٠ – بفرض سـ ، ع جزءان من مجموعة ك فبرهن أن :

$$(\text{سـ} \cap \text{ع}) \cup (\text{سـ} \cap \text{ع}') = \text{سـ}$$

الحل : لدينا :

$$(\text{سـ} \cap \text{ع}) \cup (\text{سـ} \cap \text{ع}')$$

= سـ ∩ (ع ∪ ع′) (قابلية توزيع التقاطع على الاجتماع)

= سـ ∩ ك (خاصة ٤ الفقرة ٣٩)

= سـ (خاصة ٢ الفقرة ٣٥)

١١١ – بفرض سـ ، ع ، صـ ثلاثة أجزاء من مجموعة ك فبرهن أن:

سـ − (ع − صـ) = (سـ − ع) ∪ (سـ ∩ صـ)

الحل : لدينا : سـ − (ع − صـ)

= سـ − (ع ∩ صـ′) (خاصة ٧ الفقرة ٤٢)

= سـ ∩ (ع ∩ صـ′)′ (خاصة ٧ الفقرة ٤٢)

= سـ ∩ (ع′ ∪ صـ) (قانون دو مورغان الثاني)

= (سـ ∩ ع′) ∪ (سـ ∩ صـ) (قابلية توزيع التقاطع على الاجتماع)

= (سـ − ع) ∪ (سـ ∩ صـ) (خاصة ٧ الفقرة ٤٢)

١١٢ – بفرض سـ ، ع ، صـ ثلاثة أجزاء من مجموعة ك فبرهن أن:

سـ − (ع ∩ صـ) = (سـ − ع) ∪ (سـ − صـ)

الحل : لدينا : سـ − (ع ∩ صـ)

= سـ ∩ (ع ∩ صـ)′ (خاصة ٧ الفقرة ٤٢)

= سـ ∩ (ع′ ∪ صـ′) (قانون دو مورغان الثاني)

= (سـ ∩ ع′) ∪ (سـ ∩ صـ′) (قابلية توزيع التقاطع على الاجتماع)

= (سـ − ع) ∪ (سـ − صـ) (خاصة ٧ الفقرة ٤٢)

١١٣ – بفرض سـ ، ع ، صـ ، ى أربعة أجزاء من مجموعة ك فبرهن أن :

(سـ − ع) ∩ (صـ − ى) = (سـ ∩ صـ) − (ع ∪ ى)

الحـل : لدينا : (سـ − ع) ∩ (صـ − ى)

= (سـ ∩ ع′) ∩ (صـ ∩ ى′)　　(خاصة ٧ للفقرة ٤٢)

= سـ ∩ (ع′ ∩ صـ) ∩ ى′　　(الخاصة التجميعية للتقاطع)

= سـ ∩ (صـ ∩ ع′) ∩ ى′　　(الخاصة التبديلية للتقاطع)

= (سـ ∩ صـ) ∩ (ع′ ∩ ى′)　　(الخاصة التجميعية للتقاطع)

= (سـ ∩ صـ) ∩ (ع ∪ ى)′　　(قانون دو مورغان الأول)

= (سـ ∩ صـ) − (ع ∪ ى)　　(خاصة ٧ الفقرة ٤٢)

١١٤ – إذا فرضنا سـ ، ع جزأين من مجموعة ك . فبرهن أن :

سـ ⊇ ع ⇔ سـ ∩ ع′ = ∅ ⇔ سـ′ ∪ ع = ك

الحـل : لدينا :

سـ ⊇ ع ⇔ سـ − ع = ∅　　(تعريف الفرق)

⇔ سـ ∩ ع′ = ∅　　(خاصة ٧ الفقرة ٤٢)

⇔ (سـ ∩ ع′)′ = ∅′

⇔ سـ′ ∪ (ع′)′ = ك　　(قانون دو مورغان الثاني)

⇔ سـ′ ∪ ع = ك　　(خاصة ٢ الفقرة ٣٩)

١١٥ – أوجد ثنوية كل من المتطابقتين :

١ – سـ ∩ (سـ ∪ ع) = سـ

٢ – (سـ ∩ ∅) ∪ (سـ ∪ ك) = ك

الحـل :

١ – يكفي أن نضع في المتطابقة المفروضة الاشارة ∪ عوضاً عن ∩ والاشارة ∩ عوضاً عن ∪ فنحصل على ثنويتها وهي المتطابقة :

سـ ∪ (سـ ∩ ع) = سـ

٢ً – نبدل في المتطابقة المفروضة الإشارة $\cup$ بـ $\cap$ والإشارة $\cap$ بـ $\cup$ و $\varnothing$ بـ ك و ك بـ $\varnothing$ فنحصل على ثنويتها وهي المتطابقة :

$$(\text{س} \cup \text{ك}) \cap (\text{س} \cap \varnothing) = \varnothing$$

١١٦ – برهن صحة المتطابقتين :

١ً – $(\text{س} \cap \text{ك}) \cup (\text{ع} \cap \varnothing) = \text{س}$

٢ً – $(\text{س} \cup \varnothing) \cap (\text{ع} \cup \text{ك}) = \text{س}$

الحل :

١ً – لدينا :

$$\text{س} \cap \text{ك} = \text{س} \quad \text{و} \quad \text{ع} \cap \varnothing = \varnothing$$

وبالتالي : $(\text{س} \cap \text{ك}) \cup (\text{ع} \cap \varnothing) = \text{س} \cup \varnothing = \text{س}$

٢ً – بما أن المتطابقة الثانية هي ثنوية المتطابقة الأولى وبما أن الأولى صحيحة فثنويتها وهي المتطابقة الثانية صحيحة أيضاً .

١١٧ – أثبت أن : $(\text{س} \subseteq \text{ع} \text{ و } \text{ع} \subseteq \text{ص}) \Rightarrow \text{س} \subseteq \text{ص}$

الحل :

إن $\text{س} \subseteq \text{ع} \Leftrightarrow \text{س} \cap \text{ع} = \text{س}$ (١)
و $\text{ع} \subseteq \text{ص} \Leftrightarrow \text{ع} \cap \text{ص} = \text{ع}$ (٢) } (تعريف التقاطع)

بالتعويض من (٢) في (١) نجد :

$$(\text{س} \cap \text{ع}) \cap \text{ص} = \text{س}$$

أو $\text{س} \cap (\text{ع} \cap \text{ص}) = \text{س}$ (الخاصة التجميعية للتقاطع)

أو $\text{س} \cap \text{ص} = \text{س}$ (بالتعويض اعتماداً على (٢))

ومنه $\text{س} \subseteq \text{ص}$ (تعريف التقاطع)

تمارين غير محلولة

الاجتماع :

١١٨ – لتكن ك مجموعة طلاب الصف الأول الثانوي في إحدى الثانويات العربية .

و سـ = { س : س ∈ ك ومتفوق بالرياضيات }

و ع = { س : س ∈ ك ومتفوق بالفيزياء }

١ً – عيّن المجموعة سـ ∪ ع ٢ً – إذا كان س طالباً ∈ ك ومتفوقاً بالرياضيات وبالفيزياء فهل س ∈ سـ ∪ ع .

١١٩ – أوجد سـ ∪ ع في كل من الحالات الآتية :

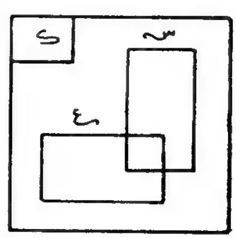
١ً – سـ = { أ ، ب ، حـ } ، ع = { ب ، حـ ، د }

٢ً – سـ = { أ ، ب ، حـ } ، ع = { أ ، ب }

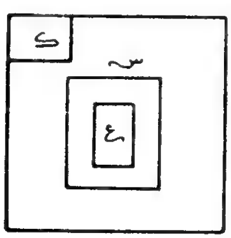
٣ً – سـ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، ع = { ٤ }

٤ً – سـ = { ★ ، O } ، ع = { + ، – }

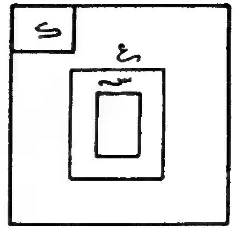
١٢٠ – ظلل سـ ∪ ع في كل من الأشكال الآتية :



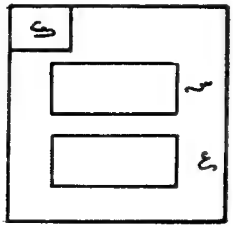
الشكل (٦٥)



الشكل (٦٦)



الشكل (٦٧)



(الشكل (٦٨)

١٢١ – اذا كانت سـ ⊇ عـ و صـ مجموعة ما فأثبت أن :

سـ ∪ صـ ⊇ عـ ∪ صـ

١٢٢ – اذا كان سـ ∪ عـ = ∅ فأثبت أن :

سـ = ∅ و عـ = ∅

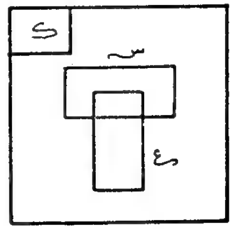
التقاطع :

١٢٣ – أوجد أ ∩ ب في كل من الحالات الآتية :

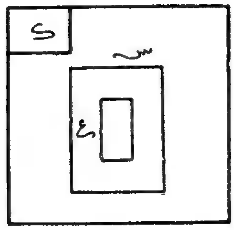
١ – أ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥} ، ب = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦}
٢ – أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ب = {٤ ، ٢}
٣ – أ = {٣ ، ٧ ، ٨} ، ب = {٨ ، ٣ ، ٧}
٤ – أ = {+ ، −} ، ب = {× ، ÷}
٥ – أ = {٠ ، ٢ ، ٤} ، ب = {٢ ، ٣ ، ٥}
٦ – أ = ط ، ب = ط*

١٢٤ – اذا كانت سـ مجموعة قواسم العدد ٢٤ ، و عـ مجموعة قواسم العدد ١٨ فأوجد سـ ∩ عـ .

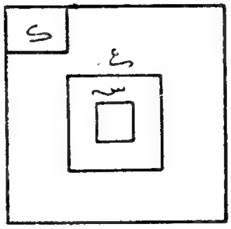
١٢٥ – ظلل سـ ∩ عـ في كل من الأشكال الآتية :



الشكل (٦٩)



الشكل (٧٠)



الشكل (٧١)

١٢٦ – لتكن سـ مجموعة طلاب مدرستك الذين لا تقل أطوالهم عن ١٨٠ سم و ع مجموعة الطلاب الذين لا تقل أوزانهم عن ٦٠ كغ. مم تتكون المجموعـة سـ ∩ ع ؟ ومتى تكون هي المجموعة الخالية ؟

١٢٧ – لتكن ك مجموعة الأشكال الرباعية في مستوي و

سـ = {س : س ∈ ك و س متوازي أضلاع}

ع = {س : س ∈ ك و س مستطيل}

صـ = {س : س ∈ ك و س معين}

مم تتكون المجموعات سـ ∩ ع ، ع ∩ صـ ، سـ ∩ صـ

١٢٨ – لتكن (س ، ع) نقطة في مستوي المحورين الاحداثيين و سـ ، ع مجموعتي النقاط : سـ = {(س، ع) : س، ع ∈ ح و س – ع ⩾ ٠}

و ع = {(س، ع) : س، ع ∈ ح و ع ⩽ ٠}

و صـ = {(س، ع): س، ع ∈ ح و ع ⩽ س وع ⩾ ١}

١ – مثّل على مستوي المحورين الاحداثيين سـ ∩ ع .

٢ – مثّل على مستوي المحورين الاحداثيين (سـ ∩ ع) ∪ صـ

١٢٩ – اذا كان سـ ⊇ صـ فأثبت أن :

سـ ∩ ع ⊇ صـ

١٣٠ – من أجل أي مجموعتين سـ و ع أثبت أن :

سـ ∩ ع ⊆ سـ ∪ ع

كيف تصبح هذه العبارة إذا كان سـ = ع ؟

١٣١ – من أجل أي مجموعتين سـ ، ع أثبت أن :

سـ = ع ⇔ سـ ∪ ع = سـ ∩ ع

١٣٢ – إذا كان سـ ⊆ ع وكانت صـ مجموعة ما فأثبت أن :

سـ ∩ صـ ⊆ ع ∩ صـ

المتممة :

١٣٣ – إذا كانت سـ = مجموعة جميع الأشخاص السّمان
ع = مجموعة جميع الأشخاص القصار

١ً – مم تتكون المجموعات

سـ' ، ع' ، (سـ ∪ ع)' ، (سـ ∩ ع)'

٢ً – هل تحقق سـ و ع قانوني دو مورغان .

١٣٤ – لتكن ك مجموعة جميع الأشخاص

و سـ = {س : س شخص عربي}

و ع = {س : س شخص يشرب الشاي}

و صـ = {س : س شخص مسن} .

مم تتكون المجموعات التالية : سـ' ، سـ ∩ ع ، ع' ∩ صـ' ، (ع ∪ صـ) ، (سـ ∩ ع) ∩ صـ ، سـ' ∪ (ع ∩ صـ) ، ع ∩ ع' ، سـ ∪ ع ، ك' ، ع ∩ صـ' ، (ع ∩ صـ)' .

١٣٥ – أثبت أن : ١ – سـ ∪ ع = (سـ' ∩ ع')'

٢ – سـ ∩ ع = (سـ' ∪ ع')'

الفرق :

١٣٦ – عيّن المجموعة سـ في كل من الحالات الآتية :

١ – سـ = {أ، ب، جـ، د} – {هـ، د، ذ}

٢ – سـ = {أ، ب، جـ، د، هـ، و} – {جـ، هـ، و}

٣ – سـ = {أ، ب، جـ، د} – {هـ، ط، ذ}

٤ – سـ = {أ، ب، جـ، د} – { }

٥ – سـ = { } – {أ، ب، جـ، د}

٦ – سـ = {أ، ب، جـ} – {جـ، أ؛ ب}

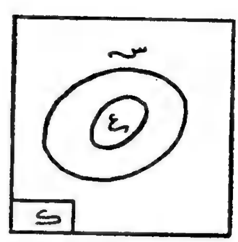
٧ – سـ = {أ} – {أ، ب، جـ}

٨ – سـ = {ذ} – {أ، ب، جـ}

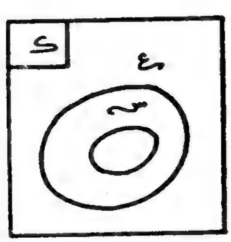
٩ – سـ = {س : س متوازي أضلاع} – {س:س مستطيل}

١٠– سـ = صـ⁺ – صـ⁻

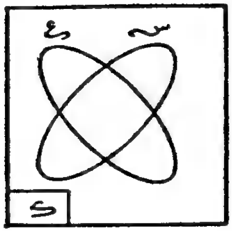
١٣٧ – ظلّل سـ – ع في كل من الأشكال الآتية :



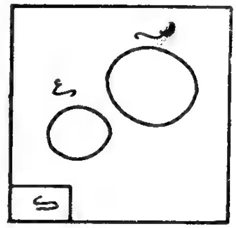
الشكل (٧٢)



الـ ـل (٧٣)

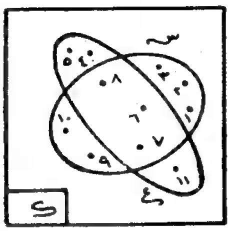


الشكل (٧٥)



الشكل (٧٤)

١٣٨ – في الشكل (٧٦)



الشكل (٧٦)

أوجد :

١ – س . ٢ – ع

٣ – س ∩ ع ٤ – س – ع

٥ – ع – س ٦ – س ∪ ع

١٣٩ – اكتب بشكل أبسط كلا من المجموعات الآتية :

١ – س ∩ ∅′ ، ٢ – س ∪ ك′

٤ – س – س′ ، ٤ – س ∩ ك′

١٤٠ – أثبت أن ع – س هو جزء من س .

الفرق التناظري :

١٤١ – عيّن المجموعة س في كل من الحالات الآتية :

١ – س = { ا ، ب ، ح } Δ { ح ، ء ، ه }

٢ – س = { ا ، ب ، ح ، ء } Δ { ا ، ء }

٣ – س = { ا ، ب ، ح } Δ { د ، ه }

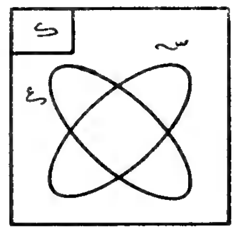
٤َ - س = {أ ، ب ، حـ} Δ { }

٥َ - س = { } Δ {ء ، هـ ، و}

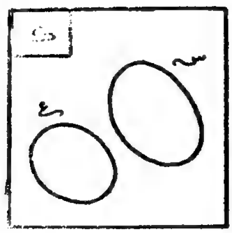
١٤٢ - إذا كانت أ = مجموعة جميع الأشخاص القصار
ب = مجموعة جميع الأشخاص السمان

مم تتكون المجموعات : أ - ب ، ب - أ ، أ Δ ب

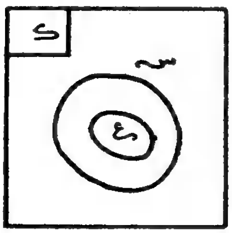
١٤٣ - ظلل س Δ ع في كل من الأشكال الآتية :



الشكل (٧٧)



الشكل (٧٨)



الشكل (٧٩)

جبر المجموعات ومبدأ الثنوية :

١٤٤ - أثبت أن : س ∪ (س ∩ ع)' = ك

١٤٥ - إذا كان س ∩ ع = ∅ فأثبت أن ع ∩ س' = ع

١٤٦ - إذا كان س ∩ ع = ∅ فأثبت أن س ∪ ع' = ع'

١٤٧ - أثبت أن (س - ع) ∩ ع = ∅

١٤٨ - برهن أن س - ع' = س ∩ ع

١٤٩ - برهن أن س' - ع' = ع - س

١٥٠ - أثبت أن أ Δ ب = (أ ∩ ب') ∪ (ب ∩ أ')

١٥١ - أوجد ثنوية كل من المتطابقات الآتية :

١ً – (سـ ∩ ع) ∪ (ع ∩ صـ) = (سـ ∪ صـ) ∩ ع

٢ً – (سـ ∪ ع) ∩ (سـ ∪ ع′) = سـ

٣ً – (ع ∪ سـ′) ∩ سـ = ع ∩ سـ

٤ً – سـ ∪ (ع ∩ صـ) = (سـ ∩ ك) ∪ (ع ∩ صـ)

١٥٢ – أثبت أن (سـ ∩ ك) ∩ (∅ ∪ سـ′) = ∅

١٥٣ – أثبت أن (سـ ∪ ∅) ∪ (ك ∩ سـ′) = ك

أجوبة وإرشادات

الاجتماع :

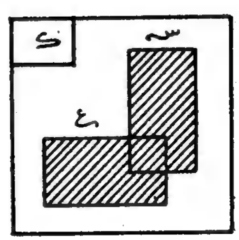
١١٨ – ١ً – سـ ∪ ع = {س : س طالب متفوق بالرياضيات أو بالفيزياء}

٢ً – كل طالب متفوق بالرياضيات والفيزياء ∈ سـ ∪ ع
(انظر معنى أو في الفقرة ٧ ، ٤ً)

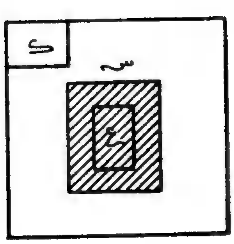
١١٩ – ١ً – {أ ، ب ، حـ ، د}　　٢ً – {أ ، ب ، حـ}

٣ً – {٢ ، ٤ ، ٦}　　٤ً – {★ ، O ، + ، –}

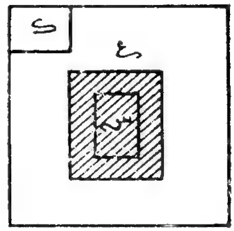
١٢٠ – نظلل الأجزاء غير المشتركة والمشتركة إن وجدت فنحصل بالترتيب على الأشكال الآتية :



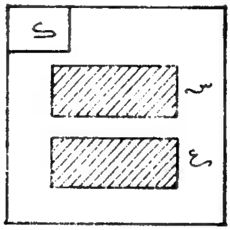
الشكل (٨٠)



الشكل (٨١)



الشكل (٨٢)



الشكل (٨٣)

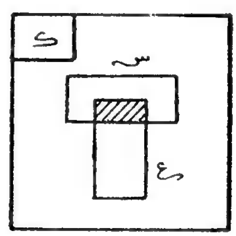
١٢٢ – من المعلوم أن س ⊆ س ∪ ع ولكن س ∪ ع = ∅
اذن س ⊆ ∅ ولكن ∅ ⊆ س ومنه س = ∅ ...
وبالمثل نبرهن أن ع = ∅ .

التقاطع :

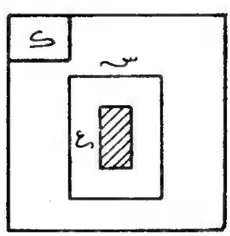
١٢٣ – ١ً – {١، ٢، ٥} ٢ً – {٢، ٤}
٣ً – {٣، ٧، ٨} ٤ً – ∅
٥ً – {٢} ٦ً – ط*

١٢٤ – {١، ٢، ٣، ٦}

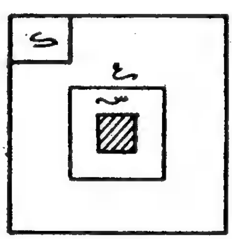
١٢٥ – نظلل الجزء المشترك بين مخططي س و ع فنحصل على الأشكال :



الشكل (٨٤)



الشكل (٨٥)



الشكل (٨٦)

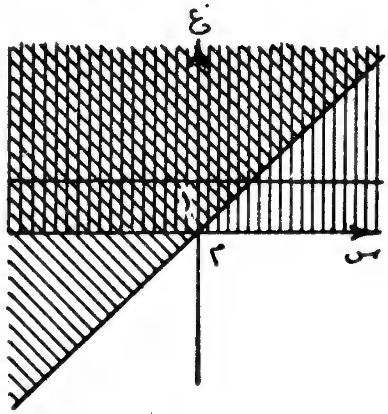
١٢٦ – س ∩ ع = {س : س طالب لا يقل طوله عن ١٨٠ سم ولا يقل وزنه عن ٦٠ كغ} . وتكون المجموعة خالية عندما لا يوجد أي طالب في المدرسة طوله ١٨٠ سم على الأقل ووزنه ٦٠ كغ على الأقل

١٢٧ – سـ ∩ عـ = {س : س ∈ ك و س مستطيل}

عـ ∩ صـ = {س : س ∈ ك و س مربع}

سـ ∩ صـ = {س : س ∈ ك و س معين}

١٢٨ – ١ً – سـ ∩ عـ هو الجزء المظلل بخطوط متقاطعة في الشكل (٨٧)



الشكل (٨٧)

٢ً – (سـ ∩ عـ) ∪ صـ هو كذلك الجزء المظلل بخطوط متقاطعة في الشكل نفسه .

المتممة :

١٣٣ – ١ً – سـ′ = مجموعة جميع الأشخاص الذين ليسوا سماناً ،

عـ′ = هي مجموعة جميع الأشخاص الذين ليسوا قصاراً.

(سـ ∪ عـ)′ = مجموعة الأشخاص الذين ليسوا سماناً ولا قصاراً

(سـ ∩ عـ)′ = مجموعة الأشخاص الذين ليسوا سماناً أو ليسوا قصاراً.

٢ً – واضح أن (سـ ∪ عـ)′ = سـ′ ∩ عـ′

وأن (سـ ∩ عـ)′ = سـ′ ∪ عـ′

١٣٤ – سـ′ = {س : س شخص غير عربي}

سـ ∩ عـ = {س : س عربي ويشرب الشاي}

عـ′ ∩ صـ′ = {س : س غير مسن ولا يشرب الشاي}

(ع ∪ صـ)' = { س : س غير مسن ولا يشرب الشاي }

(سـ ∩ ع) ∩ صـ = { س : س عربي ومسن ويشرب الشاي }

سـ' ∪ (ع ∩ صـ) = { س : س (غير عربي أو يشرب الشاي)
و (غير عربي أو مسن) }

ع ∪ ع' = { س : س يشرب الشاي أو لا يشربه } = ك

سـ ∪ ع = { س : س عربي أو يشرب الشاي }

ك' = ∅

ع ∩ صـ' = { س : س يشرب الشاي وغير مسن }

(ع ∩ صـ')' = { س : س لا يشرب الشاي أو غير مسن }

ملاحظة :

يستفاد في كتابة المجموعات السابقة من خواص العمليات على القضايا (راجع الفصل الأول) .

الفرق :

١٣٦ - ١ - { أ ، ب ، حـ }   ٢ - { أ ، ب ، د }

٣ - { أ ، ب ، حـ ، د }   ٤ - { أ ، ب ، حـ ، د }

٥ - ∅   ٦ - ∅

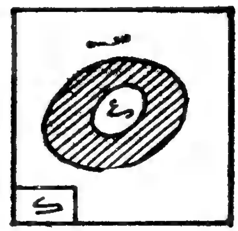
٧ - ∅   ٨ - { هـ }

٩ - { س : س متوازي أضلاع وليس مستطيلاً }

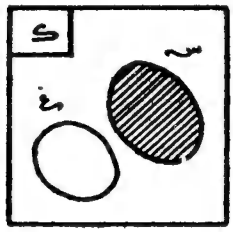
١٠ - صـ⁺ - { ٠ }

١٣٧ - في الشكل (٧٢) نظلل من مخطط سـ المنطقة الخارجية عن مخطط ع فنحصل على الشكل (٨٨) . في الشكل (٧٣) لا يمكننا تظليل سـ - ع لأن سـ - ع = ∅ . وفي الشكل

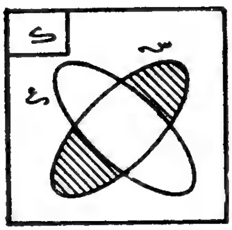
(٧٤) نظلل سـ فقط فنحصل على الشكل (٨٩) . وفي الشكل (٧٥) نظلل مناطق مخطط سـ الخارجة عن مخطط ع فنحصل على الشكل (٩٠) .



الشكل (٨٨)



الشكل (٨٩)



الشكل (٩٠)

١٣٨ - ١ً - {١ ، ٢ ، ٣ ، ٩ ، ١٠ ، ٦ ، ٧ ، ٨}
٢ً - {٦ ، ٧ ، ٨ ، ١١ ، ٤ ، ٥}　　٣ً - {٦ ، ٧ ، ٨}
٤ً - {١ ، ٢ ، ٣ ، ٩ ، ١٠}　　٥ً - {١١ ، ٤ ، ٥}
٦ً - {١ ، ٢ ، ٣ ، ٩ ، ١٠ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١١ ، ٤ ، ٥}

١٣٩ - ١ً - سـ　　٢ً - سـ　　٣ً - سـ　　٤ً - $\varnothing$

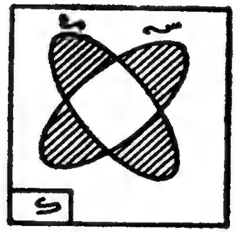
١٤٠ - لدينا ع - سـ = ع ∩ سـ′ ⊇ سـ′

الفرق التناظري :

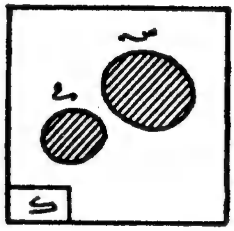
١٤١ - ١ً - {ا ، ب ، ى ، هـ}　　٢ً - {ب ، حـ}
٣ً - {ا ، ب ، حـ ، ى ، هـ}　　٤ً - {ا ، ب ، حـ}
٥ً - {ى ، هـ ، و}

١٤٢ - ا - ب = {س : س شخص قصير وليس سميناً}
ب - ا = {س : س شخص سمين وليس قصيراً}
ا △ ب = {س : س شخص قصير وليس سميناً أو شخص سمين وليس قصيراً}

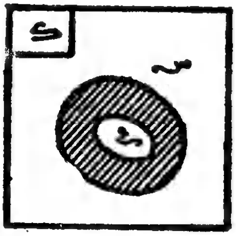
١٤٣ – نترك الجزء المشترك بين مخططي سـ و ع (إن وجد) بدون تظليل فنحصل على الأشكال (٩١) ، (٩٢) ، (٩٣) .



الشكل (٩١)



الشكل (٩٢)



الشكل (٩٣)

جبر المجموعات ومبدأ الثنوية :

١٤٤ – $\text{سـ} \cup (\text{سـ} \cap \text{ع})' = \text{سـ} \cup (\text{سـ}' \cup \text{ع}')$
$= (\text{سـ} \cup \text{سـ}') \cup \text{ع}' = \text{ك} \cup \text{ع}' = \text{ك}$

١٤٥ – $\text{سـ} \cap \text{ع} = \varnothing \Leftrightarrow \text{ع} - \text{سـ} = \text{ع} \Leftrightarrow \text{ع} \cap \text{سـ}' = \text{ع}$
$\Leftrightarrow \text{سـ}' \cap \text{ع} = \text{ع}$

١٤٦ – اعتماداً على نتيجة التمرين السابق نكتب :

$\text{سـ}' \cap \text{ع} = \text{ع} \Leftrightarrow (\text{سـ}' \cap \text{ع})' = \text{ع}'$
$\Leftrightarrow (\text{سـ}')' \cup \text{ع}' = \text{ع}' \Leftrightarrow \text{سـ} \cup \text{ع}' = \text{ع}'$

١٤٧ – $(\text{سـ} - \text{ع}) \cap \text{ع} = (\text{سـ} \cap \text{ع}') \cap \text{ع}$
$= \text{سـ} \cap (\text{ع}' \cap \text{ع}) = \text{سـ} \cap \varnothing = \varnothing$

١٤٨ – $\text{سـ} - \text{ع}' = \text{سـ} \cap (\text{ع}')' = \text{سـ} \cap \text{ع}$

١٤٩ – $\text{سـ}' - \text{ع}' = \text{سـ}' \cap (\text{ع}')' = \text{سـ}' \cap \text{ع} = \text{ع} \cap \text{سـ}$
$= \text{ع} - \text{سـ}$.

١٥٠ - $\text{ا} \,\Delta\, \text{ب} = (\text{ا} - \text{ب}) \cup (\text{ب} - \text{ا}) = (\text{ا} \cap \text{ب}') \cup (\text{ب} \cap \text{ا}')$

١٥١ - ١ - $(\text{س} \cup \text{ع}) \cap (\text{ع} \cup \text{ص}) = (\text{س} \cap \text{ص}) \cup \text{ع}$

٢ - $(\text{س} \cap \text{ع}) \cup (\text{س} \cap \text{ع}) = \text{س}$

٣ - $(\text{ع} \cap \text{س}') \cup \text{س} \qquad = \text{ع} \cup \text{س}$

٤ - $\text{س} \cap (\text{ع} \cup \text{ص}) = (\text{س} \cup \varnothing) \cap (\text{ع} \cup \text{ص})$

١٥٢ - $(\text{س} \cap \text{ك}) \cap (\varnothing \cup \text{س}') = \text{س} \cap \text{س}' = \varnothing$

١٥٣ - صحيحة لأنها ثنوية المتطابقة السابقة .

* * *

الفصل الرابع

الجداء الديكارتي

٤٨ – الأزواج المرتبة Ordered pairs : من المعروف أنه إذا كان س فصل النقطة ب و ع ترتيبها فاننا نرمز لهذه النقطة بـ (س ، ع) ونقول إن الزوج (س ، ع) يمثل النقطة ب في المستوي حيث نسمي س الاحداثي الأول و ع الاحداثي الثاني . كما أن اضافة الإسمين محمد ومصطفى إلى بعضها يعطي اسم شخص معين اسمه محمد واسم أبيه مصطفى ، ويمكن أن نمثل اسم هذا الشخص بالزوج (محمد ، مصطفى) .

نلاحظ مما تقدم ان الزوج (س ، ع) مفهوم يختلف عن مفهوم كل من س و ع وأن هذا المفهوم يختلف بحسب الترتيب الذي نعطيه لهما . فالنقطة (س ، ع) تختلف بصورة عامة عن النقطة (ع ، س) ، كما أن الشخص الذي يحمل الاسم (محمد ، مصطفى) يختلف عن الشخص الذي يحمل الاسم (مصطفى ، محمد) .

تعريف : إن الزوج المرتب (س ، ع) هو كائن رياضي مؤلف من العنصرين س ، ع مأخوذين بالترتيب س ثم ع . نسمي س العنصر الأول أو المركبة الأولى و المسقط الأول للزوج المرتب كما نسمي ع العنصر الثاني أو المركبة الثانية أو المسقط الثاني لهذا الزوج .

ينتج عما تقدم

إذا كان أ ≠ ب فان (أ ، ب) ≠ (ب ، أ)

(أ ، ب) = (حـ ، د) ⟺ (أ = حـ) ∧ (ب = د)

(أ ، ب) ≠ (حـ ، د) ⟺ (أ ≠ حـ) ∨ (ب ≠ د)

أمثلة :

١ – (١ ، ٢) ≠ (٣ ، ٢)

٢ – (√٢ ، ٤) ≠ (√٢ ، –٤)

٣ – (√٢ ، ١) = (س ، ع) ⟺ س = √٢ ، ع = ١

٤٩ – الجداء الديكارتي: Cartisian Product ، Produit cartésient :

لتكن المجموعتان سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ } و عـ = { ٢ ، ٤ } . إذا شكلنا جميع الأزواج المرتبة التي تقع مركبتها الأولى في المجموعة الأولى ، سـ ، والمركبة الثانية في المجموعة الثانية ، عـ ، نحصل على مجموعة جديدة نسميها الجداء الديكارتي للمجموعة سـ في المجموعة عـ ، وهي :

{ (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٤) }

تعريف : الجداء الديكارتي لمجموعة ما سـ في مجموعة ثانية عـ هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي تقع المركبة الأولى لكل منها في المجموعة الأولى سـ والمركبة الثانية في المجموعة الثانية عـ .

نكتب هذا الجداء بالشكل سـ × عـ ويقرأ سـ ضرب عـ ويكون:

سـ × عـ = { (س ، ع) : (س ∈ سـ) ∧ (ع ∈ عـ) }

مثال (١) ان الجداء الديكارتي للمجموعة سـ = { ٠ ، ١ ، ٣ } في المجموعة عـ = { أ ، حـ } ، هو المجموعة :

س × ع = { (٠ ، أ) ، (١ ، أ) ، (٣ ، أ)
(٠ ، حـ) ، (١ ، حـ) ، (٣ ، حـ) }

أما الجداء الديكارتي للمجموعة ع في المجموعة س فهو المجموعة :

ع × س = { (أ ، ٠) ، (أ ، ١) ، (أ ، ٣) ،
(حـ ، ٠) ، (حـ ، ١) ، (حـ ، ٣) }

ويلاحظ أن س × ع ≠ ع × س

مثال (٢) : إن الجداء الديكارتي للمجموعة س = { سالم ، قاسم ، زيد }
في المجموعة ع = { دمشق ، القاهرة } هو المجموعة :

س × ع = { (سالم ، دمشق) ، (سالم ، القاهرة) ، (قاسم ، دمشق) ، (قاسم ، القاهرة) ، (زيد ، دمشق) ، (زيد ، القاهرة) } .

أما الجداء الديكارتي ع × س فهو المجموعة :

ع × س = { (دمشق ، سالم) ، (دمشق ، قاسم) ، (دمشق ، زيد) ، (القاهرة ، سالم) ، (القاهرة ، قاسم) ، (القاهرة ، زيد) } .

ويلاحظ أيضاً ان س × ع ≠ ع × س

٥ – ملاحظة :

إن جدول الانتماء للجداء الديكارتي هو :

س	ع	س × ع
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	٠
٠	٠	٠

إن (١) الموجود في العمود الأول يعني أن المركبة الأولى س من الزوج المرتب (س ، ع) ينتمي إلى المجموعة س . اما (٠) فإنه يعني أن المركبة الأولى من هذا الزوج لا تقع في س . وكذلك الأمر من أجل العمود الثاني . أما الاشارة (١) التي تقع في العمود الثالث فانها تعني ان المركبة الأولى من الزوج (س ، ع) تنتمي إلى المجموعة الأولى س من الجداء س × ع بينما تقع المركبة الثانية لهذا الزوج في المجموعة الثانية ع من الجداء الديكارتي المذكور .

٥١ – تمثيل الجداء الديكارتي :

١ – التمثيل الجدولي : يمكن تمثيل الجداء الديكارتي للمجموعة س = { ١ ، ٣ ، ٥ } في المجموعة ع = { ٢ ، ٤ ، ٦ } بأن نضع عناصر المجموعة س في عمود جدول وعناصر المجموعة ع في سطر ونشكل الجدول :

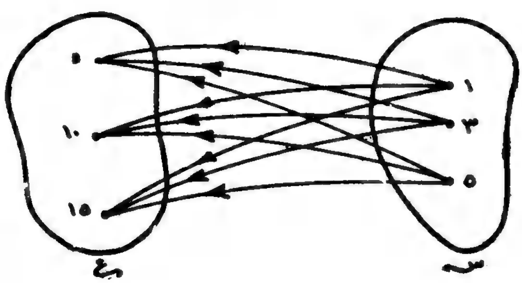
	٢	٤	٦
١	(١، ٢)	(١، ٤)	(١، ٦)
٣	(٣، ٢)	(٣، ٤)	(٣، ٦)
٥	(٥، ٢)	(٥، ٤)	(٥، ٦)

بصورة عامة : إذا أردنا تشكيل جدول يضم الجداء الديكارتي للمجموعتين س في ع نتخذ جدولاً ذا مدخلين نكتب في مدخله الشاقولي (الرأسي) عناصر المجموعة الأولى س ونكتب في مدخله الأفقي عناصر المجموعة الثانية ع ثم نكتب عند التقاء كل سطر من أسطر هذا الجدول مع عمود من أعمدته الزوج المرتب الذي نضع مركبتيه على الترتيب على السطر والعمود اللذين يتقاطعان في موضع هذا الزوج .

مثال : يمكن تمثيل الجداء الديكارتي للمجموعة سـ = {٢ ، ٥ ، ٧} في المجموعة ع = {أ ، ب ، حـ ، ء} بالجدول :

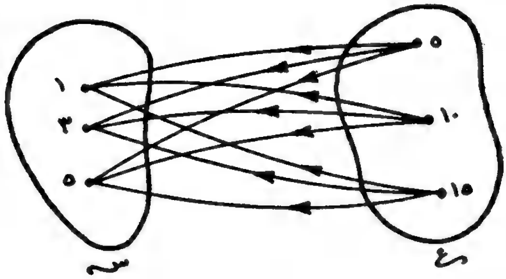
	أ	ب	حـ	ء
٢	(٢ ، أ)	(٢ ، ب)	(٢ ، حـ)	(٢ ، ء)
٥	(٥ ، أ)	(٥ ، ب)	(٥ ، حـ)	(٥ ، ء)
٧	(٧ ، أ)	(٧ ، ب)	(٧ ، حـ)	(٧ ، ء)

٢ – **التمثيل السهمي** : ويمكن تمثيل الجداء الديكارتي للمجموعة سـ = {١ ، ٣ ، ٥} في المجموعة ع = {٥ ، ١٠ ، ١٥} بأن نرسم مخطط فين – أولر والمثلثين للمجموعتين سـ و ع ، ومن ثم نرسم أسهماً موجهة تنطلق من عناصر المجموعة سـ وتنتهي في عناصر ع ، فنحصل على المخطط التالي الذي نسميه **المخطط السهمي** للجداء الديكارتي سـ × ع



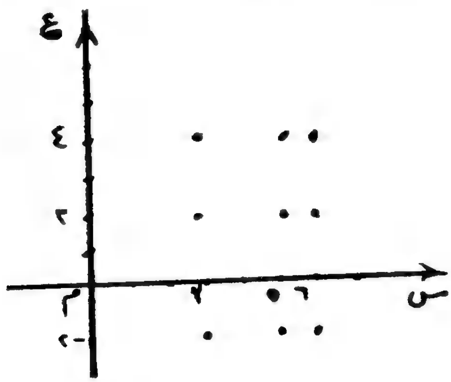
الشكل (٩٤)

أما المخطط السهمي للجداء الديكارتي ع × سـ فيعطى بالمخطط التالي :



الشكل (٩٥)

٣ – **التمثيل البياني** : ويمكن كذلك أن نمثل الجداء الديكارتي للمجموعة س = {٣ ، ٥ ، ٦} في المجموعة ع = {–٢ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، بمجموعة نقاط في المستوي س م ع . تقع فواصل هذه النقاط في المجموعة س وتراتيبها في المجموعة ع : نحصل على الشكل (٩٦) الذي نسميه التمثيل البياني للجداء الديكارتي س × ع



الشكل (٩٦)

٥٢ – خواص الجداء الديكارتي :

١ –

الجداء الديكارتي لمجموعة ما س في مجموعة خالية ∅ هو مجموعة خالية أي :   س × ∅ = ∅ ، ∅ × س = ∅

ذلك لأنه لو كان $\text{سـ} \times \varnothing \neq \varnothing$ فهنالك على الأقل زوج مرتب واحد ، $(\text{س} ، \text{ع})$ مثلاً ، حيث $\text{س} \in \text{سـ}$ و $\text{ع} \in \varnothing$ ، ولكن هذا يناقض الفرض لأن $\varnothing$ مجموعة خالية لا تحوي أي عنصر .

ونبرهن بصورة مشابهة أن : $\varnothing \times \text{سـ} = \varnothing$.

٢ — إذا كانت المجموعتان سـ و عـ غير متساويتين وكانتا غير خاليتين فان :

$\text{سـ} \times \text{عـ} \neq \text{عـ} \times \text{سـ}$ (الجداء الديكارتي غير تبديلي).

وبالعكس إذا كان $(\text{سـ} \neq \varnothing) \wedge (\text{عـ} \neq \varnothing)$ فإنه يكون:

$$(\text{سـ} \times \text{عـ} = \text{عـ} \times \text{سـ}) \Leftrightarrow (\text{سـ} = \text{عـ})$$

البرهان :

إذا كانت المجموعتان سـ و عـ غير متساويتين فهناك على الأقل عنصر واحد ، أ مثلاً ، ينتمي لاحداهما ، ولنفرض أنها سـ ، ولا ينتمي إلى الثانية ، نستنتج من هذا أن جميع الأزواج المرتبة $(\text{أ} ، \text{ع})\ \forall\ \text{ع} \in \text{عـ}$ ، تنتمي إلى المجموعة $\text{سـ} \times \text{عـ}$ ولا تنتمي إلى المجموعة $\text{عـ} \times \text{سـ}$ وبالتالي فان $\text{سـ} \times \text{عـ} \neq \text{عـ} \times \text{سـ}$.

العكس : إن $\text{سـ} \times \text{عـ} = \text{عـ} \times \text{سـ}$ يعني :

$$\forall\ (\text{أ} ، \text{ب}) \in \text{سـ} \times \text{عـ} \Leftrightarrow (\text{أ} ، \text{ب}) \in \text{عـ} \times \text{سـ}$$

ان الطرف الأول من العلاقة السابقة يؤدي إلى أن :

$$(\text{أ} \in \text{سـ}) \wedge (\text{ب} \in \text{عـ})$$

بينما يؤدي الطرف الثاني إلى أن : $(\text{أ} \in \text{عـ}) \wedge (\text{ب} \in \text{سـ})$ أي أن ::

$$\left.\begin{array}{l} (\forall\ \text{أ} \in \text{سـ} \Rightarrow \text{أ} \in \text{عـ}) \Leftrightarrow \text{سـ} \subseteq \text{عـ} \\ (\forall\ \text{ب} \in \text{عـ} \Rightarrow \text{ب} \in \text{سـ}) \Leftrightarrow \text{عـ} \subseteq \text{سـ} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{سـ} = \text{عـ}$$

أما اذا كان سـ = ∅ فإن سـ × ع = ع × سـ = ∅

وكذلك اذا كان ع = ∅ فإن سـ × ع = ع × سـ = ∅

مثال (١) : لتكن المجموعتان سـ = {٠ ، ١ ، ٢} و ع = {٣ ، ٥} .

الجداء الديكارتي : سـ × ع

= {(٠،٣) ، (٠،٥) ، (١،٣) ، (١،٥) ، (٢،٣) ، (٢،٥)}

والجداء الديكارتي : ع × سـ

= {(٣،٠) ، (٣،١) ، (٣،٢) ، (٥،٠) ، (٥،١) ، (٥،٢)}

ونلاحظ أن : سـ × ع ≠ ع × سـ

مثال (٢): لتكن المجموعتان سـ = {−١ ، ٣} و ع = {٣ ، −١}

الجداء الديكارتي سـ × ع

= {(−١ ، ٣) ، (−١ ، −١) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، −١)}

والجداء الديكارتي : ع × سـ

= {(٣ ، −١) ، (٣ ، ٣) ، (−١ ، −١) ، (−١ ، ٣)}

ونلاحظ أن : سـ × ع = ح × سـ وهذا بالفعل ناتج من كون أن سـ = ع .

٣- الجداء الديكارتي توزيعي بالنسبة للاجتماع أي أن :

سـ × (ع ∪ صـ) = (سـ × ع) ∪ (سـ×صـ)

حيث سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات كيفية .

البرهان :

يجب أن نثبت أن كل عنصر ينتمي إلى سـ × (ع ∪ صـ)

ينتمي إلى (سـ × ع) ∪ (سـ × صـ) وبالعكس .

(أ ، ب) ∈ سـ × (ع ∪ صـ)

⟺ [(أ ∈ سـ) ∧ (ب ∈ ع ∪ صـ)] (حسب التعريف)

⟺ [(أ ∈ سـ) ∧ ((ب ∈ ع) ∨ (ب ∈ صـ))]

⟺ [(أ ∈ سـ ∧ ب ∈ ع) ∨ (أ ∈ سـ ∧ ب ∈ صـ)]

⟺ [(أ ، ب) ∈ سـ × ع ∨ (أ ، ب) ∈ سـ × صـ]

⟺ (أ ، ب) ∈ (سـ × ع) ∪ (سـ × صـ)

يمكن برهان هذه الخاصة بطريقة جدول الحقيقة بالشكل التالي :

سـ	ع	صـ	ع ∪ صـ	سـ × (ع ∪ صـ)	سـ × ع	سـ × صـ	(سـ × ع) ∪ (سـ × صـ)
١	١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	١	١	٠	١
١	٠	١	١	١	٠	١	١
٠	١	١	١	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	١		٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

الواحد يمثل انتماء العنصر إلى المجموعة البسيطة أو مجموعة الجداء . أما الصفر فانه يمثل نفي هذا الانتماء مع ملاحظة أن الانتماء للجداء لا يكون محققاً إلا إذا تحقق انتماء المركبة الأولى للمجموعة الأولى والمركبة الثانية للمجموعة الثانية .

مثال : لتكن المجموعات :

سـ = { ١ } ، ع = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، صـ = { −١ ، ١ }

ان الجداء الديكارتي سـ × ع = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) }

والجداء الديكارتي سـ × صـ = { (١ ، −١) ، (١ ، ١) }

وبالتالي يكون : (سـ × ع) ∪ (سـ × صـ) = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (١ ، −١) } .

ونرى من جهة ثانية أن :

ع ∪ صـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، −١ } وبالتالي الجداء الديكارتي :

سـ × (ع ∪ صـ) = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (١ ، −١) }

ذن : سـ × (ع ∪ صـ) = (سـ × ع) ∪ (سـ × صـ) .

٤ – الجداء الديكارتي توزيعي بالنسبة للتقاطع أي :

سـ × (ع ∩ صـ) = (سـ × ع) ∩ (سـ × صـ)

حيث سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات كيفية .

البرهان .

نبرهن أن كل عنصر ينتمي إلى سـ × (ع ∩ صـ) ينتمي إلى (سـ × ع) ∩ (سـ × صـ) وبالعكس

(أ ، ب) ∈ سـ × (ع ∩ صـ)

⇔ [أ ∈ سـ ∧ (ب ∈ ع ∧ ب ∈ صـ)]

⇔ [(أ ∈ سـ ∧ ب ∈ ع) ∧ (أ ∈ سـ ∧ ب ∈ صـ)]

⟺ [(أ، ب) ∈ س × ع ∧ (أ، ب) ∈ س × ص]

⟺ (أ، ب) ∈ (س × ع) ∩ (س × ص) .

ويمكن أيضاً إثبات هذه الخاصة بطريقة جدول الحقيقة بالشكل التالي:

س	ع	ص	ع ∩ ص	س×(ع∩ص)	س×ع	س×ص	(س×ع) ∩ (س×ص)
١	١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	٠	٠	١	٠	٠
١	٠	١	٠	٠	٠	١	٠
٠	١	١	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

مثال : لنأخذ المجموعات :

س = {١} و ع = {١، ٣، ٥} و ص = {−١، ١}

ان الجداء الديكارتي : س × ع = {(١،١) ، (١،٣) ، (١،٥)}

والجداء الديكارتي : س × ص = {(١، −١) ، (١، ١)}

إذاً : (س × ع) ∩ (س × ص) = {(١، ١)}

ومن جهة ثانية نلاحظ أن ع ∩ ص = {١} وبالتالى نجد أن :
س × (ع ∩ ص) = {(١، ١)} .

إذاً : س × (ع ∩ ص) = (س × ع) ∩ (س × ص) .

٥ - إذا كان عدد عناصر المجموعتين س و ع هو $ن_1$ و $ن_2$ على الترتيب فان عدد عناصر مجموعة الجداء الديكارتي س×ع هو $ن_1 \times ن_2$.

وذلك لأن كل عنصر ينتمي إلى المجموعة سـ يشترك كمركبة أولى في ج$_2$ زوجاً مرتباً في كل منها المركبة الثانية عنصر ينتمي الى المجموعة ع . ويمكن توضيح ذلك بالتمثيل الجدولي .

	ع$_1$	ع$_2$	....	ع$_{ن_2}$
س$_1$	(س$_1$ ، ع$_1$)	(س$_1$، ع$_2$)	....	(س$_1$ ، ع$_{ن_2}$)
س$_2$	(س$_2$ ، ع$_1$)	(س$_2$، ع$_2$)	....	(س$_2$ ، ع$_{ن_2}$)
⋮	⋮	⋮		⋮
س$_{ن_1}$	(س$_{ن_1}$ ، ع$_1$)			(س$_{ن_1}$ ، ع$_{ن_2}$)

مثال : لتكن المجموعتان سـ = {٢،٣} و ع = {١ ، ٤ ، ٥}

ان مجموعة الجداء الديكارتي سـ × ع = {(٢،١) ، (٢،٤) ، (٢،٥) ، (٣،١) ، (٣،٤) ، (٣،٥)} تتألف من ٢ × ٣ = ٦ عناصر .

٥٣ – الجداء الديكارتي لمجموعة في نفسها .

يتألف الجداء الديكارتي لمجموعة سـ في نفسها من جميع الأزواج المرتبة التي تكون فيها المركبتان الأولى والثانية عنصرين في سـ ونكتب ذلك بالشكل سـ × سـ أو سـ^2 ويكون ،

سـ × سـ = {(س ، ع) : س ، ع ∈ سـ}

مثال : ان الجداء الديكارتي للمجموعة سـ = {١،٥} في نفسها هو :

سـ × سـ = {(١،١) ، (١،٥) ، (٥،١) ، (٥،٥)}

٥٤ – الجداء الديكارتي لثلاث مجموعات :

لتكن المجموعات الثلاث سـ ، ع ، صـ ، المختلفة او المتساوية ولنشكل كائناً رياضياً نسميه ثلاثية مرتبة ونرمز لها بالشكل (س ، ع ،ص) حيث العنصر الأول س من هذه الثلاثية هو عنصر كيفي من المجموعة الأولى سـ ، والعنصر الثاني ع من هذه الثلاثية هو عنصر كيفي من المجموعة الثانية ع ، والعنصر الثالث ص من هذه الثلاثية هو عنصر كيفي من المجموعة الثالثة صـ .

نسمي بالجداء الديكارتي للمجموعات الثلاث سـ ، ع ، صـ الواردة بهذا الترتيب ، مجموعة جميع الثلاثيات المرتبة (س ، ع ، ص) حيث س ∋ سـ ، ع ∋ ع ، ص ∋ صـ .

ويكتب هذا الجداء بالشكل سـ × ع × صـ (ويقرأ سـ ضرب ع ضرب صـ) .

مثال (١) : يمكن تمييز كل شخص في قرية ما باسمه واسم أبيه واسم جده بهذا الترتيب فنكتب مثلاً (محمد ، سعيد ، خالد) .

حيث محمد ينتمي الى مجموعة أبناء القرية وينتمي سعيد الى مجموعة الآباء في هذه القرية بينما ينتمي خالد الى مجموعة الجدود في القرية .

مثال (٢) : يعطى تاريخ كل يوم بثلاثية من الشكل ١٢/٥/١٢٧٠ والتي يمكن كتابتها بالشكل (١٢ ، ٥ ، ١٢٧٠) .

حيث ١٢ عنصر من مجموعة الأعداد الطبيعية من ١ الى ٣٠ (اذا اعتبرنا أن عدد أيام كل شهر ثلاثين يوماً) والعدد ٥ عنصر من مجموعة الأعداد الطبيعية من ١ الى ١٢ .

أما العدد ١٢٧٠ فهو عنصر من مجموعة الأعداد الصحيحة

وينتج عن التعريف السابق أن :

(س ، ع، ص) = (ب، حـ، ء) ⟺ ((س = ب) ∧ (ع = حـ) ∧ (ص = ء))

يكتب الجداء سـ × سـ × سـ بالشكل $سـ^{٣}$.

وبصورة عامة إذا كان لدينا عدد من المجموعات : $سـ_{١}$، $سـ_{٢}$، ...، $سـ_{ن}$ المختلفة أو المتساوية فإنـــه يمكننا أن نشكل كائناً رياضياً من الشكل ($س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، ... ، $س_{ن}$) .

حيث $س_{١} \in سـ_{١}$ ، $س_{٢} \in سـ_{٢}$ ، ... ، $س_{ن} \in سـ_{ن}$

إن مجموعة جميع هذه الكائنات الرياضية التي يمكن تشكيلها كما سبق هي الجداء الديكارتي

$سـ_{١}$ × $سـ_{٢}$ × ... × $سـ_{ن}$

تمارين محلولة

الازواج المرتبة :

١٥٤ – اكتب الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الأول في كل منها – ٢ ويكون المسقط الثاني أحد الأعداد ٠ ، – ١ ، $\sqrt{٥}$.

الحـــل :

ان هذه الأزواج المرتبة هي (–٢، ٠) ، (–٢، –١) ، (–٢، $\sqrt{٥}$).

١٥٥ – اكتب الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الثاني في كل منها ⍴ ويكون المسقط الأول أحد العناصر حـ ، ك ، هـ .

الحل :

ان هذه الأزواج المرتبة هي (حـ، ⍴) ، (ك، ⍴) ، (هـ، ⍴) .

١٥٦ – أوجد قيمة س إذا علمت أن الزوجين المرتبين (٣س ، $\sqrt{٢}$) و (٢ س + ١ ، $\sqrt{٢}$) متساويان .

الحـل :

لكي يتساوى الزوجان المرتبان يجب أن تتساوى المركبتان (المسقطان) المتقابلتان . اذن يجب أن يكون :

٣ س = ٢ س + ١ ⇐ س = ١

١٥٧ - أوجد قيمة كل من س و ع إذا علمت أن الزوجين المرتبين (س ، ٢) و (٣ ، ٢ س − ع) متساويان .

الحـل :

ينتج عن تساوي الزوجين المفروضين أن :

س =
٢ = ٢ س − ع
⇐ س = ٣ و ع = ٤

١٥٨ - لتكن المجموعتان :

سـ = { سالم ، قاسم ، فريد } و عـ = { سعيد ، يونس }

أوجد الجداء الديكارتي سـ × عـ . والجداء الديكارتي عـ × عـ ثم مثّل كلا منهما سهمياً

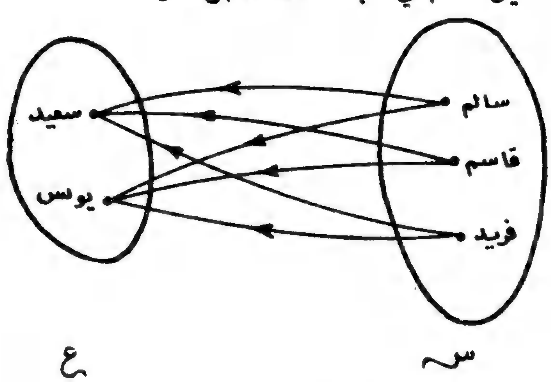
الحـل : الجداء الديكارتي

سـ × عـ = { (سالم، سعيد) ، (سالم، يونس) ، (قاسم، سعيد) ، (قاسم، يونس) ، (فريد، سعيد) ، (فريد ، يونس)}

والجداء الديكارتي: عـ × عـ =

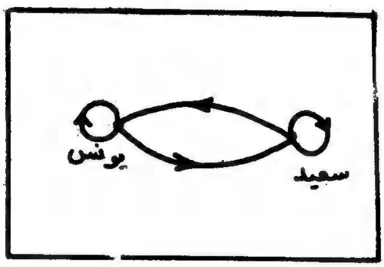
{ (سعيد ، سعيد) ، (سعيد ، يونس) ، (يونس ،يونس) ، (يونس ، سعيد)}

ان التمثيل السهمي للجداء سـ×عـ هو :



الشكل (٩٧)

والتمثيل السهمي للجداء
ع × ع هو :



ع الشكل (٩٨)

١٥٩ – ينظم مكتب سياحي رحلات تقوم من إحدى المدن دمشق ، بيروت ، بغداد وتصل إلى احدى المدن التالية : القاهرة ، طرابلس ، الجزائر . مثّـــل هذه الرحلات بشكل جداء ديكارتي . ما هو عدد هذه الرحلات ؟ مثّل ذلك جدولياً .

الحل :

لنأخذ المجموعة س = { دمشق ، بيروت ، بغداد } . والمجموعـة ع = { القاهرة ، طرابلس ، الجزائر } . يمكن أن نمثل كل رحلة بزوج مرتب مركبته الأولى المدينة التي تبدأ بها الرحلة والمركبة الثانية المدينة التي تصل اليها الرحلة . وتكون مجموعة الرحلات هذه هي مجموعة الجداء الديكارتي س × ع وهي :

س × ع = { (دمشق ، القاهرة) ، (دمشق ، طرابلس) ، (دمشق ، الجزائر) ، (بيروت ، القاهرة) ، (بيروت ، طرابلس) ، (بيروت ، الجزائر) ، (بغداد ، القاهرة) ، (بغداد ، طرابلس) ، (بغداد ، الجزائر) } .

إن عدد هذه الرحلات هو تسع وهو يساوي عدد عناصر س ، وهي ثلاثة ، مضروبة بعدد عناصر ع وهي ثلاثة .

والتمثيل الجدولي لهذه الرحلات هو :

	القاهرة	طرابلس	الجزائر
دمشق	(دمشق،القاهرة)	(دمشق،طرابلس)	(دمشق، الجزائر)
بيروت	(بيروت،القاهرة)	(بيروت،طرابلس)	(بيروت،الجزائر)
بغداد	(بغداد،القاهرة)	(بغداد،طرابلس)	(بغداد ، الجزائر)

١٦٠ – لتكن سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات اختيارية . برهن صحة العلاقة التالية :

$$\text{سـ} \times (\text{ع} - \text{صـ}) = (\text{سـ} \times \text{ع}) - (\text{سـ} \times \text{صـ})$$

(الجداء الديكارتي توزيعي بالنسبة للفرق) .

الحل :

بالاستناد إلى تعريف الجداء الديكارتي والفرق نكتب :

$$\text{سـ} \times (\text{ع} - \text{صـ})$$

$$= \{ (\text{أ}،\text{ب}) : \text{أ} \in \text{سـ} \wedge (\text{ب} \in \text{ع} \wedge \text{ب} \notin \text{صـ}) \}$$

$$= \{ (\text{أ}،\text{ب}) : (\text{أ}،\text{ب}) \in \text{سـ} \times \text{ع} \wedge (\text{أ}،\text{ب}) \notin \text{سـ} \times \text{صـ} \}$$

$$= \{ (\text{أ}،\text{ب}) : (\text{أ}،\text{ب}) \in [(\text{سـ} \times \text{ع}) - (\text{سـ} \times \text{صـ})] \}$$

$$= (\text{سـ} \times \text{ع}) - (\text{سـ} \times \text{صـ}) .$$

ويمكن البرهان على صحة العلاقة السابقة بطريقة جدول حقيقة بالشكل التالي :

سـ	ع	صـ	ع − صـ	سـ × (ع − صـ)	سـ × ع	سـ × صـ	(سـ × ع) − (سـ × صـ)
١	١	١	٠	٠	١	١	٠
١	١	٠	١	١	١	٠	١
١	٠	١	٠	٠	٠	١	٠
٠	١	١	٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

حيث ١ يمثل انتماء العنصر للمجموعة بينما ٠ يمثل عدم انتمائه .

١٦١ – لتكن سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات كيفيـة . برهن صحة العلاقة التالية :

سـ × (ع ∆ صـ) = (سـ × ع) ∆ (سـ × صـ)

(الجداء الديكارتي توزيعي بالنسبة للفرق التناظري) .

الحـــل :

بالاستناد إلى تعريف الفرق التناظري نكتب :

سـ × (ع ∆ صـ)

= { (أ ، ب) : أ ∈ سـ و (ب ∈ ع فقط أو ب ∈ صـ فقط) }

= { (أ ، ب) : (أ ، ب) ∈ سـ × ع فقط
أو (أ ، ب) ∈ سـ × صـ فقط }

= { (أ ، ب) : (أ ، ب) ∈ (سـ × ع) ∆ (سـ × صـ) }

= (سـ × ع) ∆ (سـ × صـ) .

هذا ويمكن البرهان على صحة العلاقة السابقة بجدول الحقيقة على الشكل الآتي :

سـ	ع	صـ	ع Δ صـ	سـ × (ع Δ صـ)	سـ × ع	سـ × صـ	(سـ × ع) Δ (سـ × صـ)
١	١	١	٠	٠	١	١	٠
١	١	٠	١	١	١	٠	١
١	٠	١	١	١	٠	١	١
٠	١	١	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	١	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	١	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

الرمز ١ يدل على انتماء العنصر إلى المجموعة بينما الرمز ٠ يدل على عدم الانتماء .

١٦٢ - لتكن سـ و ع و صـ و ن أربع مجموعات كيفية . برهن صحة العلاقة :

(سـ × ع) ∩ (صـ × ن) = (سـ ∩ صـ) × (ع ∩ ن)

الحل :

حسب تعريف الجداء الديكارتي والتقاطع يمكن أن نكتب :

(سـ × ع) ∩ (صـ × ن)

= {(أ، ب) : (أ، ب) ∈ سـ × ع ∧ (أ، ب) ∈ صـ × ن}

= {(أ، ب) : (أ ∈ سـ ∧ ب ∈ ع) ∧ (أ ∈ صـ ∧ ب ∈ ن)}

= {(أ، ب) : (أ ∈ سـ ∧ أ ∈ صـ) ∧ (ب ∈ ع ∧ ب ∈ ن)}

= {(أ، ب) : أ ∈ سـ ∩ صـ ∧ ب ∈ ع ∩ ن}

= {(أ، ب) : (أ، ب) ∈ (سـ ∩ صـ) × (ع ∩ ن)}

= (سـ ∩ صـ) × (ع ∩ ن) .

هذا ويمكن برهان العلاقة السابقة بطريقة جدول الحقيقة .

١٦٣ - لتكن المجموعات :

س = {١، ٢، ٣} و ع = {٢، ٣، ٥} و ص = {١، ٣، ٥، ٧}

أوجد المجموعات التالية :

١ - س × س ٢ - س × (ع - ص)

٣ - ع × (س Δ ص)

٤ - (س × ع) ∩ (ع × س)

٥ - (س - ع) × (س - ص)

٦ - (ع Δ س) × (ع Δ ص)

الحل :

استناداً إلى تعريف الجداء الديكارتي نجد :

١ - س × س = {(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (٢، ١)،
(٢، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ١)، (٣، ٢)،
(٣، ٣)} .

٢ - وبالاستناد إلى تعريف الفرق نجد أن :

ع - ص = {٢} وبالتالي فإن :

س × (ع - ص) = {(١، ٢)، (٢، ٢)، (٣، ٢)} .

٣ - بالاستناد إلى تعريف الفرق التناظري نجد أن :

س Δ ص = {٢، ٥، ٧} وبالتالي فان :

ع × (س Δ ص) = {(٢، ٢)، (٢، ٥)، (٢، ٧)، (٣، ٢)، (٣، ٥)،
(٣، ٧)، (٥، ٢)، (٥، ٥)، (٥، ٧)} .

٤ - هذا وان الجداء الديكارتي :

س × ع = {(١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٥)، (٢، ٢)، (٢، ٣)،
(٢، ٥)، (٣، ٢)، (٣، ٣)، (٣، ٥)}

وان ع × س = {(٢،١) ، (٢،٢) ، (٢،٣) ، (٣،١) ، (٣،٢) ، (٣،٣) ، (٥،١) ، (٥،٢) ، (٥،٣)}

وبالتالي فان :

(س×ع) ∩ (ع × س) = {(٢،٢) ، (٢،٣) ، (٣،٢) ، (٣،٣)}

٥ً – ان الفرق س – ع = {١} والفرق س – ص = {٢}
وبالتالي فان :

(س – ع) × (س – ص) = {(١ ، ٢)}

٦ً – ان الفرق التناظري ع ∆ س = {١ ، ٥} والفرق التناظري ع ∆ ص = {٢ ، ١ ، ٧} وبالتالي فان :

(ع ∆ س) × (ع ∆ ص) = {(١،٢) ، (١،١) ، (١،٧) ، (٥،٢) ، (٥،١) ، (٥،٧)}.

١٦٤ – لتكن المجموعات : س = {١،٢} ، ع = {ى ، ن} ، ص = {٠،١}. اكتب مجموعة الجداء الديكارتي س× ع× ص وكذلك مجموعة الجداء الديكارتي س × ص × (س – ص)

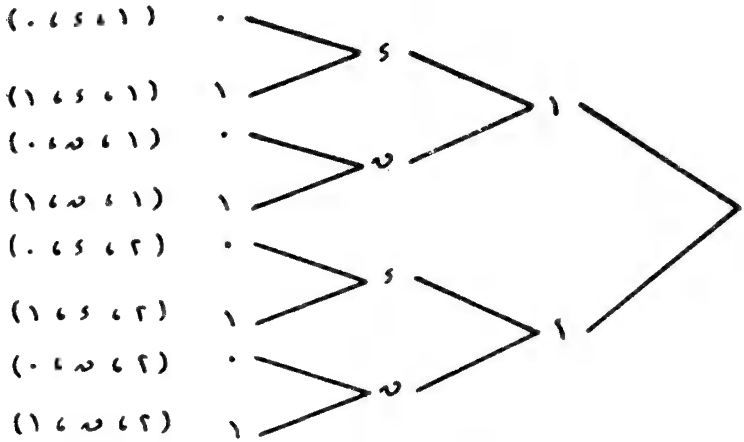
الحل :

استناداً إلى التعريف نجد أن :

١) مجموعة الجداء الديكارتي س × ع × ص هي :

{(١ ، ى ، ٠) ، (١ ، ن ، ٠) ، (١ ، ى ، ١) ، (١ ، ن ، ١) ، (٢ ، ى ، ٠) ، (٢ ، ن ، ٠) ، (٢ ، ى ، ١) ، (٢ ، ن ، ١)}

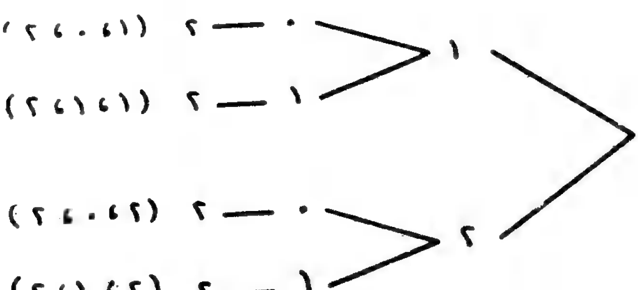
ويمكن كتابة مجموعة الجداء س × ع × ص هذه بالمخطط التالي:



الشكل (٩٩)

(نسمي هذا المخطط مخطط الشجرة للجداء سـ × ع × صـ)

٢) ان مجموعة الفرق سـ – صـ = {٢} وبالتالي فان مجموعة الجداء الديكارتي سـ × صـ × (سـ – صـ) تعطى بمخطط الشجرة التالي :



الشكل (١٠٠)

تمارين غير محلولة

١٦٥ – اكتب الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الاول في كل منها كرة والمسقط الثاني أحد العناصر : طائرة ، سلة ، قدم .

١٦٦ – اكتب الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الثاني في كل منها والمسقط الاول أحد العناصر : س ، ب ، ١٥ ، √٣ .

١٦٧ – أوجد قيمة كل من أ و ب إذا علمت أن الزوجين المرتبين (أ + ٢ ، ب − ١) و (٢ ب + ١ ، أ − ٢) متساويان .

١٦٨ – أوجد قيمة كل من س و ع إذا علمت أن الزوجين المرتبين (س + ع ، − ١) و (٧ ، س − ع) متساويان .

١٦٩ – لتكن المجموعتان س = { أ ، ب } و ع = { ب ، حـ ، ء } .
أوجد كلا من المجموعات التالية :

١) س × (س △ ع) ومثّل ذلك سهمياً
٢) (س − ع) × (س ∩ ع) .
٣) (س ∪ ع) × ع ومثّل ذلك جدولياً .

١٧٠ – لتكن المجموعات :

س = {٣ ، ٤ ، ٥} و ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} و ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} .

أوجد المجموعات التالية :

١) س × س   ٢) س × ع

٣) (سـ × سـ) ∩ (ع × ع)
٤) (سـ × ع) ∪ (ع × سـ)
٥) سـ × (صـ − ع)
٦) (ع − صـ) × (سـ Δ صـ)
٧) (سـ − صـ) × صـ
٨) (سـ Δ ع) × (صـ − سـ)

١٧١ – لتكن سـ و ع و صـ و ن أربع مجموعات كيفية . برهن صحة العلاقتين التاليتين :

(سـ × ع) ∪ (صـ × ن) ⊆ (سـ ∪ صـ) × (ع ∪ ن)

(سـ ⊆ صـ و ع ⊆ ن) ⇐ سـ × ع ⊆ صـ × ن

١٧٢ – لتكن سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات كيفية . برهن صحة العلاقات التالية :

(سـ ∪ ع) × صـ = (سـ × صـ) ∪ (ع × صـ)
(سـ ∩ ع) × صـ = (سـ × صـ) ∩ (ع × صـ)
(سـ − ع) × صـ = (سـ × صـ) − (ع × صـ)
(سـ Δ ع) × صـ = (سـ × صـ) Δ (ع × صـ)

(الخواص التوزيعية للجداء الديكارتي من اليسار) .

١٧٣ – لتكن المجموعات :
سـ = {٢ ، ٣} ، ع = {١ ، ٣ ، ٥} ، صـ = {٣ ، ٤} .

اكتب كلا من المجموعات التالية :
١) سـ × ع × صـ
٢) سـ × (سـ − ع) × (سـ Δ صـ)
٣) سـ² × ع   ٤) سـ × صـ²

أجوبة وإرشادات

١٦٥ – (كرة ، طائرة) ، (كرة ، سلة) ، (كرة ، قدم) .

١٦٦ – (س ، $\sqrt{٣}$) ، (ب ، $\sqrt{٣}$) ، (١٥ ، $\sqrt{٣}$) .

١٦٧ – م = ٣ ، ب = ٢ .

١٦٨ – س = ٣ ، ع = ٤ .

١٦٩ – ١– { (م ، م) ، (م ، ح) ، (م ، ى) ، (ب ، م) ، (ب ، ح) ، (ب ، ى) } .

٢– { م ، ب) } .

٣– { (م ، ب) ، (م ، ح) ، (م ، ى) ، (ب ، ب) ، (ب ، ح) ، (ب ، ى) ، (ح ، ب) ، (ح ، ح) ، (ح ، ى) ، (ى ، ب) ، (ى ، ح) ، (ى ، ى) } .

١٧٠ – استفد مما يلي في حساب الجداءات الديكارتية المطلوبة :

سـ Δ ع = { ١ ، ٢ ، ٥ } و سـ Δ صـ = { ١ ، ٢ }

و سـ – صـ = $\emptyset$ و صـ – سـ = { ١ ، ٢ }

و صـ – ع = { ٥ } و ع – صـ = $\emptyset$.

١٧٣ – استفد مما يلي في حساب الجداءات الديكارتية المطلوبة :

سـ – ع = { ٢ } سـ Δ صـ = { ٢ ، ٤ } .

الفصل الخامس

العلاقات

٥٥ – العلاقة الاحادية (الفردية) :

إذا نظرنا في مجموعة الأعداد الطبيعية ، ط ، وشكلنا فيها مجموعة جزئية ، سـ ، مؤلفة مثلاً من الأعداد الزوجية فإننا نقول إننا عرفنا علاقة أو خاصة على المجموعة ط . هذه العلاقة تقسم المجموعة ط إلى مجموعتين جزئيتين منفصلتين . تحقق عناصر المجموعة الجزئية الاولى العلاقة المذكورة بينما لا تحقق عناصر المجموعة الجزئية الثانية هذه العلاقة .

إذا أخذنا مجموعة سكان مدينة ما واستخرجنا منها مجموعة جزئية مؤلفة من الأشخاص الأميين ، فإننا نكون قد عرفنا علاقة أو خاصة في مجموعة سكان هذه المدينة . كذلك نكون أمام وضع مشابه إذا اعتبرنا مجموعة جزئية تحوي الأشخاص المتزوجين أو الأشخاص الذين تزيد أعمارهم عن أربعين سنة أو غير ذلك .

إن هذه العلاقات ، المميزات ، تميز بعض عناصر المجموعة المفروضة عن بقية العناصر . نسمي مثل هذه العلاقة **علاقة أحادية معرفة في المجموعة المفروضة** .

مثال ١ – لتكن المجموعه سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ }
لنشكل المجموعة الجزئية سـ المؤلفة من مضاعفات العدد ٣ ، أي

المجموعة الجزئية سـ$_{1}$ = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ } . اننا بذلك نكون قد عرفنا علاقة أحادية في المجموعة سـ معرفة بالخاصة : س من مضاعفات ٣ ، حيث س ∈ سـ . تقسم هذه العلاقة المجموعة سـ الى مجموعتين جزئيتين منفصلتين ، الأولى سـ$_{1}$ وتحقق عناصرها العلاقة المفروضة ، والثانية سـ$'_{1}$ ، متممة المجموعة سـ في سـ ، وجميع عناصرها لا تحقق العلاقة المفروضة .

مثال ٢ – لتكن المجموعتان سـ = { ١ ، ٣ ، ٤ } و ع { ٢ ، ٣ ، ٤ } .
لنشكل الجداء الديكارتي سـ × ع = { (١،٢) ، (١،٣) ، (١،٤) ، (٣،٢) ، (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٤،٢) ، (٤،٣) ، (٤،٤) } .

نعرف في المجموعة سـ × ع علاقة أحادية معرفة بالخاصة : الزوج المرتب (س،ع) ∈ سـ×ع عندما يكون له مركبتان متساويتان أي س=ع.
تقسم هذه العلاقة المجموعة سـ × ع إلى مجموعتين جزئيتين منفصلتين :

الأولى { (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) } تحقق عناصرها العلاقة المفروضة بينما الثانية { (١،٢) ، (١،٣) ، (١،٤) ، (٣،٢) ، (٣،٤) ، (٤،٢) ، (٤،٣) } لا تحقق عناصرها العلاقة المفروضة .

٥٦ – العلاقة الثنائية :

لتكن المجموعتان سـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } و ع = { ٤ ، ٦ ، ٨ } .
لنشكل الجداء الديكارتي لهما . سـ × ع = { (٢،٤) ، (٢،٦) ، (٢،٨) ، (٣،٤) ، (٣،٦) ، (٣،٨) ، (٥،٤) ، (٥،٦) ، (٥،٨) ، (٧،٤) ، (٧،٦) ، (٧،٨) } .

إذا نظرنا في المجموعة الجزئية المؤلفة من الأزواج المرتبة { (٣،٤) ، (٥ ، ٦) ، (٧ ، ٨) } وجدنا أن المركبة الأولى في كل منها تنقص بمقدار ١ عن المركبة الثانية . نقول في هذه الحالة إننا عرفنا علاقة

ثنائية (Binary relation و Relation binoire) من المجموعة سـ إلى المجموعة ع بالخاصة : س + ١ = ع حيث س ∋ سـ و ع ∋ ع . ان الازواج المرتبة (٣،٤) ، (٥،٦) ، (٧،٨) تحقق العلاقة وتسمى بيان هذه العلاقة . بينما لا تتحقق هذه العلاقـة من أجل أي زوج من بقية أزواج الجداء سـ × ع غير الواقعة في البيان المذكور .

كذلك لو شكلنا المجموعة الجزئية من سـ × ع المؤلفة من الازواج { (٢،٤) ، (٣،٦) ، (٢،٨) ، (٢،٦) } فاننا نجد أن المركبة الأولى في كل منها تقسم المركبة الثانية . نقول هنا أيضاً إن هـــذه الأزواج المرتبة تعرف علاقــة ثنائية من سـ إلى ع معرفة بالخاصة : (س/ع) حيث س ∋ سـ و ع ∋ ع .

إذا رمزنا بـ ر لعلاقة ثنائيــة من المحموعـة سـ إلى المجموعة ع فإننا نكتب كل زوج مرتب (س ، ع) من الجداء الديكارتي سـ×ع يحقق هذه العلاقة بالشكل س ر ع . ونرمز لكل زوج (س ، ع) لا يحقق هذه العلاقة بالشكل س $\overline{ر}$ ع . ونرمز أيضاً لبيان العلاقة ر بالرمز $د_ر$.

بصورة عامة : للعلاقة الثنائية ر ثلاثة أمور أساسية هي :

١) مجموعة أولى ، سـ ، ندعوها منطلق ر .

٢) مجموعة ثانية ، ع ، ندعوها مستقر ر .

٣) خاصة معرفة على الجداء سـ × ع تجزئه الى مجموعتين جزئيتين منفصلتين تكون هذه الخاصة على احداهما (بيان العلاقة) محققة ، بينما تكون غير محققة على الثانية .

تشكل عناصر المجموعة سـ المرتبطة بعناصر من المجموعة ع وفق العلاقة الثنائية ر ، مجموعة جزئية ، $سـ_1$ ، ندعوها **مجموعة تعريف** « Domain » **العلاقة** ر **أو قاعدتها** . كما أن عناصر ع التي تربطها العلاقة ر بعناصر من سـ تشكل مجموعة جزئية ، $ع_1$ ، ندعوها **مجموعة قيم** « Range » **العلاقة** ر **أو دعامتها** .

نمثل علاقة ثنائية ر بشكل سهمي كما يلي : نرسم مخططي فين الموافقين للمجموعتين سـ و ع ثم نرسم أسهماً موجهة منطلقة من نقاط المجموعة $سـ_1$ ومستقرة (منتهية) في نقاط المجموعة $ع_1$ المرتبطة بها وفق العلاقة ر .

مثال ١ – لتكن سـ مجموعة سكان مدينة ما ، لنرمز بـ ع لمجموعة منازل هذه المدينة .

ان الخاصة : س يملك المنزل ع حيث س ∈ سـ و ع ∈ ع تعرف لنا علاقة ثنائية من المجموعة سـ إلى المجموعة ع . ان بيان هذه العلاقة هو :

$$ب_ر = \{ (س ، ع) \in سـ \times ع : س \text{ يملك المنزل } ع \}$$

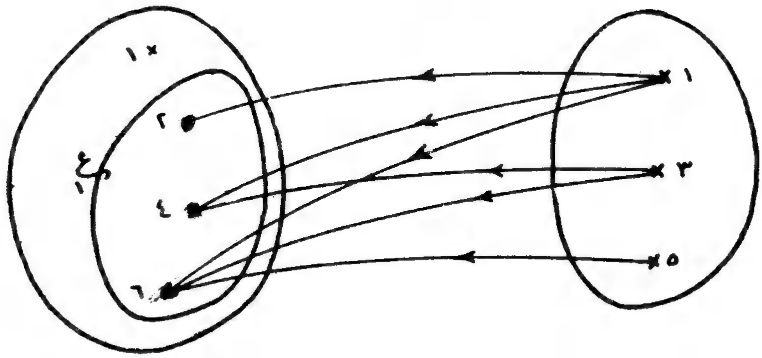
مثال ٢ – إذا كانت المجموعتان سـ = {١ ، ٣ ، ٥} و ع = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦}

فان الخاصة : « س < ع : س ∈ سـ و ع ∈ ع » تعرّف علاقة ثنائية ر معرفة من المجموعة سـ الى المجموعة ع . بيان هذه العلاقة هو :

$$ب_ر = \{ (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ٦) \}$$

إن مجموعة تعريف ر هي المجموعة $سـ_1$ = {١ ، ٣ ، ٥} = سـ
أما مجموعة قيم ر فهي $ع_2$ = {٢ ، ٤ ، ٦} .

نحصل على التمثيل السهمي للعلاقة ر برسم مخططي فين للمجموعتين س و ع ، ثم نرسم أسهماً موجهة تنطلق من س١ وتستقر في نقاط ع١ المرتبطة معها وفق العلاقة ر :



الشكل (١٠١)

ملاحظة :

كثيراً ما يدمج المؤلفون بيان العلاقة بها ويعتبرون العلاقة معرفة بالأزواج المحققة لهذه العلاقة فهي مجموعة جزئية من الجداء س × ع حيث س منطلق العلاقة و ع مستقرها فنكتب مثلاً العلاقة المعرّفة بالمثال السابق بالشكل :

ر = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ٦)}

٥٧ – **العلاقة العكسية** Inverse relation ، Relation inverse :

العلاقة العكسية لعلاقة ثنائية ر معرفة من المجموعة س إلى المجموعة ع ، هي علاقة ثنائية من ع إلى س ومعرفة بجميع الأزواج المرتبة (ع ، س) حيث (س ، ع) ∈ ر . نرمز للعلاقة العكسية بـ ر$^{-1}$

بيانهـا بـ (هـ ر)$^{-1}$.

{ (هـ ر)$^{-1}$ = { (ع ، س) : (س ، ع) ∈ هـ ر }

نحصل على التمثيل السهمي لعلاقة عكسية ر$^{-1}$ بعكس اتجاه الأسهم المرسومة في التمثيل السهمي للعلاقة ر .

مثال : لتكن المجموعتان سـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ } و ع = { ٢ ، ٤ ، ٦ } .
إذا كانت ر العلاقة المعرفة بالخاصة : « س | ع : س ∈ سـ و ع ∈ ع »
فان بيان هذه العلاقة :

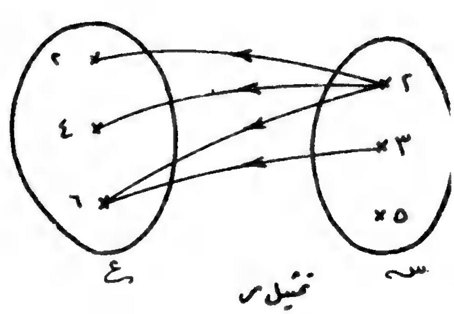
هـ ر = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٦) }

إذاً بيان العلاقة العكسية ر$^{-1}$ هو :

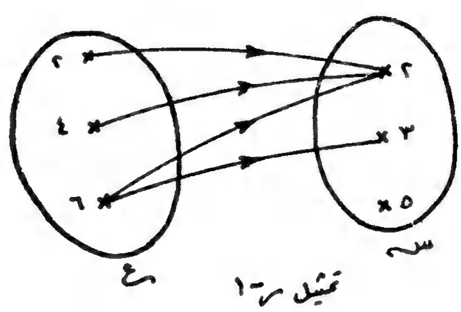
(هـ ر)$^{-1}$ = { (٢ ، ٢) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣) }

والعلاقة العكسية ر$^{-1}$ معرفة بالخاصة « ع من مضاعفات س » .

أما التمثيل السهمي للعلاقة ر والعلاقة العكسية ر$^{-1}$ فيعطى بالشكلين:



الشكل (١٠٣)



الشكل (١٠٤)

٥٨ – العلاقات في مجموعة :

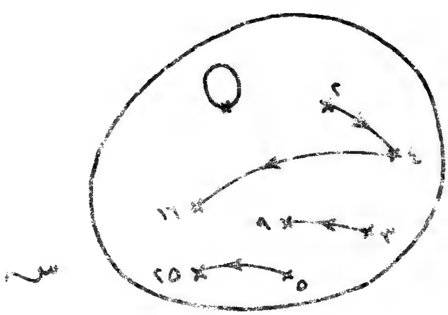
يمكن اعتبار علاقة ثنائية ر معرفة من مجموعة ما سـ إلى المجموعة سـ نفسها . نقول في هذه الحالة اننا عرفنا **علاقة في المجموعة** سـ إن بيان هذه العلاقة هو مجموعة جزئية في مجموعة الجداء الديكارتي سـ × سـ .

مثال (١): إذا كانت المجموعة سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥}

فإن الخاصة : « س^٢ = ع : س ، ع ∈ سـ » تعرف علاقة ثنائية ر في المجموعة سـ . ان بيان هذه العلاقة هو :

ر = {(١،١) ، (٢،٤) ، (٣،٩) ، (٤،١٦) ، (٥ ، ٢٥)}

تمثل سهمياً هذه العلاقة بالشكل :



الشكل (١٠٤)

(يمثل الزوج (س ، س) ∈ ر بسهم مغلق ينطلق ويستقر في النقطة س ∈ سـ) .

مثال (٢) : لتكن المجموعة سـ = {١ ، ٢} . إذا كانت جـ (سـ) مجموعة أجزاء سـ فان الخاصة « أ⊇ب و أ≠∅ : أ، ب ∈ جـ(سـ)» تعرف علاقة ر في المجموعة جـ (سـ) .

ان المجموعة جـ (سـ) = {∅ ، {١} ، {٢} ، {١ ، ٢} }

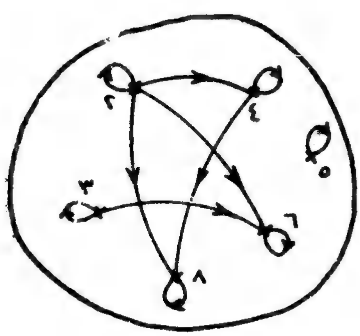
وبيان العلاقة ر هو :

ب ر = { ({١} ، {١ ، ٢}) ، ({٢} ، {١ ، ٢}) ،
({١} ، {١}) ، ({٢} ، {٢}) ، ({١ ، ٢} ،
{١ ، ٢}) } .

مثال (٣) : إذا كانت المجموعة سـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨} فان الخاصة « س | ع : س ، ع ∈ سـ » تعرف علاقة ر في المجموعة سـ .
بيان هذه العلاقة هو :

ب ر = { (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٢ ، ٨) ، (٣ ، ٦) ،
(٤ ، ٨) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ،
(٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) ، (٨ ، ٨) } .

والتمثيل السهمي لهذه العلاقة يعطى بالشكل :



الشكل (١٠٥)

٥٩ – خواص العلاقات في مجموعة :

يمكن لعلاقة معرفة في مجموعة أن تتمتع ببعض الخواص التالية :

١ – العلاقة المنعكسة «Reflexive، Réflexive»: نقول عن علاقة ر معرفة في مجموعة ما سـ إنها منعكسة إذا حقق كل عنصر من سـ مع نفسه العلاقة المفروضة . أو بعبارة ثانية :

∀ س ∈ سـ فان س ر س

مثال (١) : لتكن المجموعة سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ولتكن ر علاقة معرفة في سـ وبيانها معطى بمجموعة الأزواج المرتبة :

د ر = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٤) }

هذه العلاقة غير منعكسة وذلك لأن العنصر ٢ ∈ سـ بينما (٢ ، ٢) ∉ د ر .

مثال (٢): لتكن ج (سـ) مجموعة أجزاء المجموعة سـ . إذا كانت ر علاقة الاحتواء المعرفة في ج (سـ) فان بيانها :

د ر = { (ف ، ن) ∈ ج (سـ) × ج (سـ) : ف ⊇ ن }

ان هذه العلاقة منعكسة لأن كل مجموعة جزئية ب من سـ تحوي نفسها ، ب ⊇ ب ، اذن ب ر ب .

٢ – العلاقة المتناظرة ، Symmetric ، Symetrique : نقول عن علاقة ر معرفة في مجموعة سـ إنها متناظرة إذا كان :

(س ، ع) ∈ د ر ⇐ (ع ، س) ∈ د ر ∀ (س ، ع) ∈ د ر

نستنتج من تعريف العلاقة العكسية أن :

(س ، ع) ∈ د ر ⇔ (ع ، س) ∈ (د ر)$^{-1}$

وبالتالي يمكن أن نقول أن العلاقة ر المعرفة في المجموعة سـ متناظرة اذا كان د ر = (د ر)$^{-1}$.

مثال (١) : لتكن المجموعة سـ = { ١ ، ٥ ، ١٥ ، ٢٠ } . لتكن ر علاقة معرفة في سـ يعطى بيانها بالمجموعة :

د ر = { (١ ، ٥) ، (٢٠ ، ٥) ، (٥ ، ٢٠) ، (٥ ، ١٥) ، (١ ، ٢٠) } .

ان هذه العلاقة ليست متناظرة وذلك لأن الزوج المرتب
(١ ، ٥) ∈ حر بينما (٥، ١) ∉ حر .

مثال (٢): علاقة الاخوة المعرفة في مجموعة سكان احدى الابنية هي علاقة متناظرة .

مثال (٣): علاقة التوازي بين مستقيمات مستو علاقة متناظرة .

٣ – العلاقة اللاتناظرية «Anti - Symmetric ، Anti - Symetrique»

نقول عن علاقة ر معرفة في مجموعة س إنها لاتناظرية إذا كان :

(س ، ع) ∈ حر و (ع، س) ∈ حر ⇐ س = ع

مثال (١): إذا عرفنا في مجموعة الأعداد الطبيعية ط ، العلاقة ر بخاصة « القسمة » فان هذه العلاقة لاتناظرية ، ذلك لأنه إذا كان
(أ ، ب) و (ب ، أ) ∈ حر أي أن أ | ب و ب | أ
فإن ذلك يؤدي إلى أ = ب .

مثال (٢) : إذا عرفنا في المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } العلاقة ر التي بيانها هو :

حر = { (١، ٢) ، (٣، ٤) ، (٤، ٤) ، (٤، ٣) }

فانه لا يمكننا القول إن هذه العلاقة لاتناظرية وذلك لأن (٣، ٤) و (٤، ٣) ∈ حر بينما ٣ ≠ ٤ .

مثال (٣) : ان علاقة الاحتواء في ج (س) مجموعة أجزاء المجموعة س ، علاقة لاتناظرية ..

مثال (٤) : ان علاقة التراجح « ≥ » في مجموعة الأعداد العادية ، علاقة لاتناظرية .

يتضح من التعريف ٣ أن كل علاقة ر يتكون بيانها من العناصر القطرية للجداء سـ × سـ هي علاقـة لاتناظرية (العناصر القطرية للمجموعة سـ × سـ هي التي من الشكل (س ، س)) .

٤ – **العلاقة التخالفية (غير المتناظرة)** « Non - Symmetric ، Non - Symetrique » : نقول عن علاقة ر معرفة في مجموعة سـ إنها تخالفية إذا كان :

(س ، ع) ∈ حر ⇐ (ع ، س) ∉ حر ∀ (س،ع) ∈ حر

ينتج عن هذا التعريف أن كل علاقة تخالفية لا يمكن وصفها بأنها منعكسة لأن الزوج (س ، س) لا يمكن أن يقع في بيان العلاقـة التخالفية وذلك لأن وجود مثل هذا الزوج يعني وجود الزوج المعاكس له وهو نفسه ، وكذلك لا يمكن للعلاقة المنعكسة أن تكون تخالفية .

مثال (١) : إذا عرفنا في المجموعة سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٧ } العلاقة ر التي بيانها هو :

حر = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٧) ، (٧ ، ٢) }

فان هذه العلاقة تخالفية لأنه لا يوجد في بيانها عنصران من الشكل (س ، ع) و (ع ، س) . وهذه العلاقة في الوقت ذاته «لاتناظرية» .

مثال (٢) : إذا عرفنا في المجموعة سـ = { ٣ ، ٥ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ } العلاقة ر التي بيانها هو :

حر = { (٣ ، ٥) ، (٥ ، ١٥) ، (٢٠ ، ١٥) ، (٥ ، ٢٥) ، (١٥ ، ٥) }

فان هذه العلاقة ليست تخالفية لأن: (٥، ١٥) ∈ حر و(١٥، ٥) ∈ حر .

٥ – **العلاقة المتعدية** « Transitive » نقول عن علاقة ر معرفة في المجموعة سـ إنها متعدية إذا كان :

٧ (س ، ع) و (ع ، ص) ∈ $ح_{ر}$ ⇐ (س، ص) ∈ $ح_{ر}$.

مثال (١) : إذا عرفنا في المجموعة سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } العلاقة ر التي بيانها هو :

$ح_{ر}$ = { (١، ٣) ، (٣، ٥) ، (١، ٥) ، (٥، ٣) ، (٥، ٥) ، (٣، ٣) }

فان هذه العلاقة متعدية لأن :

(١، ٣) و (٣، ٥) ∈ $ح_{ر}$ كذلك (١، ٥) ∈ $ح_{ر}$

(١، ٣) و (٣، ٣) ∈ $ح_{ر}$ ، (١، ٣) ∈ $ح_{ر}$

(٣، ٥) و (٥، ٣) ∈ $ح_{ر}$ (٣، ٣) ∈ $ح_{ر}$

(٣، ٥) و (٥، ٥) ∈ $ح_{ر}$ ، (٣، ٥) ∈ $ح_{ر}$

(١، ٥) و (٥، ٣) ∈ $ح_{ر}$ ، (١، ٣) ∈ $ح_{ر}$

(١، ٥) و (٥، ٥) ∈ $ح_{ر}$ ، (١، ٥) ∈ $ح_{ر}$

(٥، ٣) و (٣، ٥) ∈ $ح_{ر}$ ، (٥، ٥) ∈ $ح_{ر}$

(٥، ٣) و (٣، ٣) ∈ $ح_{ر}$ ، (٥، ٣) ∈ $ح_{ر}$

(٥، ٥) و (٥، ٣) ∈ $ح_{ر}$ ، (٥، ٣) ∈ $ح_{ر}$

(٣، ٣) و (٣، ٥) ∈ $ح_{ر}$ ، (٣، ٥) ∈ $ح_{ر}$

مثال (٢) : ان علاقة التراجح « ⩾ » في مجموعة الأعداد العادية علاقة متعدية.

مثال (٣) : ان علاقة الاحتواء « ⊇ » في ج (سـ) مجموعة أجزاء المجموعة سـ ، علاقة متعدية .

٦٠ – **تركيب العلاقات** : لتكن علاقة ر علاقة ثنائية معرفة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ و ق علاقة ثنائية أخرى معرفة من المجموعة صـ إلى المجموعة ع . إن هناك علاقة جديدة هـ معرفة من سـ الى ع نسميها بتركيب العلاقتين ر و ق ونرمز لها بـ :

هـ = ق ० ر

ونقرأ ذلك بقولنا ر دوير ق . نعرف هذه العلاقة المركبة بالشكل التالي :

> **تعريف** : اذا حقق الزوج (س ، ص) العلاقة ر وحقق الزوج (ص ، ع) العلاقة ق فإننا نقول إن الزوج (س ، ع) يحقق العلاقة المركبة هـ = ق ० ر ، ونمثل ذلك بالشكل الرمزي :
>
> س هـ ع ⇔ س ∈ سـ و ع ∈ ع ، ∃ ص ∈ صـ : س ر ص و ص ق ع

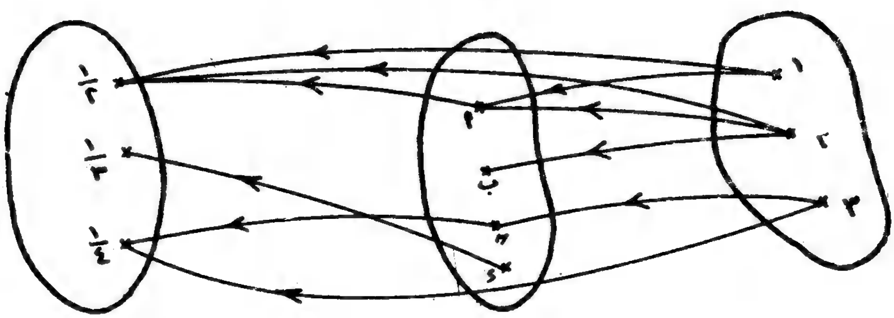
مثال (١) : لتكن العلاقة ر المعرفة على مجموعة سكان مدينة بـ « له ابن » والعلاقة ق المعرفة على المجموعة المذكورة ذاتها بـ « له بنت » إن العلاقة المركبة هـ = ق ० ر معرفة على هذه المجموعة بـ « له بنت ابن » .

نلاحظ من هذا المثال أن سـ = صـ = ع وأنه من الممكن وجود عناصر من المجموعة المتوسطة ترتبط بعناصر من سـ ولا ترتبط بعناصر من ع كما أنه من الممكن وجود عناصر من صـ مرتبطة مع عناصر من ع وغير مرتبطة مع عناصر من سـ . إن العنصر ص ∈ صـ الذي يرتبط بعنصر س ∈ سـ ولا يرتبط بأي عنصر من ع لا يؤدي إلى زوج من الشكل (س،ع) يحقق العلاقة المركبة هـ وكذلك فإن العنصر ص∈ صـ الذي يرتبط مع عنصر ع ∈ ع ولا يرتبط بأي عنصر من سـ لا يؤدي الى زوج من الشكل (س ، ع) يحقق العلاقة المركبة هـ .

مثال (٢) : ليكن سـ = {١ ، ٢ ، ٣} ، صـ = {أ ، ب ، حـ ، ء} ،

ع = $\{\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤}\}$

إن الشكل (١٠٦) يعرف العلاقة ر من سـ الى صـ والعلاقة ن من صـ الى ع والعلاقة المركبة مـ من سـ الى ع



الشكل (١٠٦)

إن بيان العلاقة ر هو :

$ﮪ_{ر}$ = {(١، أ) ، (٢، أ) ، (٢، ب) ، (٣، حـ)}

وبيان العلاقة ن هو :

$ﮪ_{ن}$ = {(أ ، $\frac{١}{٢}$) ، (حـ ، $\frac{١}{٤}$) ، (ء ، $\frac{١}{٣}$)}

أما بيان العلاقة المركبة مـ فهو :

$ﮪ_{مـ}$ = {(١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٢ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٣ ، $\frac{١}{٤}$)}

تمارين محلولة

١٧٤ – لتكن المجموعتان

س = {١، ٢، ٤، ٦} و ع = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

اكتب مجموعة الجداء الديكارتي س × (س ∩ ع) ثم عيّن العلاقة ر المعرفة من س الى س ∩ ع بالخاصة « > » .

الحل :

بما أن س ∩ ع = {٢، ٤، ٦} فانه يكون :

س × (س ∩ ع) = { (١،٢)، (١،٤)، (١،٦)، (٢،٢)، (٢،٤)، (٢،٦)، (٤،٢)، (٤،٤)، (٤،٦)، (٦،٢)، (٦،٤)، (٦،٦) } .

أما بيان العلاقة ر فهو :

د ر = { (أ،ب) : (أ،ب) ∈ س × (س ∩ ع) و أ > ب } اذن:

د ر = { (٤،٢) ، (٦،٢) ، (٦،٤) } .

١٧٥ – إذا علمت أن ابراهيم أب لسالم وزيداً أب لعلي وعمران أب لمريم . أوجد مجموعات قيم وتعريف وبيان العلاقة ر المعرفة من المجموعة س = { ابراهيم، زيد، عمران، ليلى } إلى المجموعة ع = { سالم ، علي ، عمر ، مريم } بخاصة « الابوة » . أوجد أيضاً بيان العلاقة العكسية $ر^{-١}$.

الحل :

ان مجموعة تعريف العلاقة ر هي المجموعة ا رتبة في س التي ترتبط

عناصرها بعناصر من ع وفق العلاقة ر وهي في هذه الحالة { ابراهيم ، زيد ، عمران } .

أما مجموعة قيم العلاقة ر فهي المجموعة الجزئية في ع التي ترتبط بعناصرها عناصر من س وفق العلاقة ر وهي { سالم ، علي ، مريم } .

أما بيان العلاقة ر فهو :

ة$_ر$ = { (س ، ع) : (س ، ع) ∈ س × ع و س أبٌ لـ ع } ، اذن :

ة$_ر$ = { (ابراهيم ، سالم) ، (زيد ، علي) ، (عمران ، مريم) } .

أما بيان العلاقة العكسية ر$^{-1}$ فيعطى بالمجموعة

(ة$_ر$)$^{-1}$ = { (ب ، ا) : (ا ، ب) ∈ ة$_ر$ } ، اذن :

(ة$_ر$)$^{-1}$ = { (سالم ، ابراهيم) ، (علي ، زيد) ، (مريم ، عمران) }

١٧٦ – إذا كانت المجموعة س = { ا ، ب ، حـ ، ى } أوجد خواص كل من العلاقات المعرّفة بما يلي[1] :

١ – ر$_1$ = { (ا ، ا) ، (ب ، حـ) ، (حـ ، ب) } .
٢ – ر$_2$ = { (ا ، ا) ، (ا ، ى) }
٣ – ر$_3$ = { (ا ، ا) ، (ب ، ب) ، (ى ، ى) }
٤ – ر$_4$ = { (ب ، حـ) ، (ب ، ى) ، (حـ ، ى) }

الحل :

١ – العلاقة ر$_1$ متناظرة لأنه ∀ (س ، ع) ∈ ر$_1$ فإن (ع ، س) ∈ ر$_1$ ، وبشكل آخر إن ر$_1^{-1}$ = { (ا ، ا) ، (حـ ، ب) ، (ب ، حـ) } = ر$_1$.

---

(١) نرمز أحياناً لبيان العلاقة بـ ر بدلاً من ة$_ر$ ولبيان العلاقة العكسية بـ ر$^{-1}$ بدلاً من (ة$_ر$)$^{-1}$ لاختصار الكتابة .

ثم إن ر$_1$ ليست منعكسة ، لأنها كي تكون منعكسة يلزم ويكفي أن ينتمي (س،س) إلى ر$_1$ ($\forall$ س $\in$ سـ) ، وهذا الشرط غير محقق لأن (ب،ح) $\notin$ ر$_1$ مثلاً .

وكي تكون ر$_1$ متعدية يجب أن يتحقق الاقتضاء التالي :

$\forall$ (س،ع) و (ع،ص) $\in$ ر$_1$ $\Leftarrow$ (س،ص) $\in$ ر$_1$

ولكننا نلاحظ أنه بالرغم من كون (ب ، ح) ، (ح،ب) $\in$ ر$_1$ فإن (ب،ب) $\notin$ ر$_1$ فالعلاقة غير متعدية .

وتكون ر$_1$ لاتناظرية إذا تحقق ما يلي :

اذا كان (س،ع) و (ع،س) $\in$ ر$_1$ فإن س = ع

ولكن ر$_1$ لا تحقق هذا الشرط لأن ب $\neq$ ح على الرغم من كون (ح،ح) و (د،ب) $\in$ ر$_1$ فالعلاقة ليست تناظرية .

ثم إن ر$_1$ ليست تخالفية ، لأنها كي تكون تخالفية يجب أن يتحقق الاقتضاء التالي :

$\forall$ (س،ع) $\in$ ر$_1$ $\Leftarrow$ (ع،س) $\notin$ ر$_1$

وهذا الشرط غير محقق لأن (ب،ح) و (ح،ب) $\in$ ر$_1$

٢ – العلاقــــة ر$_2$ ليست متناظرة لأن (د ، أ) $\notin$ ر$_2$ في حين (أ،د) $\in$ ر$_2$ كما أنها ليست منعكسة لأن كلا من (ب،ب) ، (ح،ح)، (د،د) لا ينتمي الى ر$_2$.

كما أنها ليست تخالفية لأن (أ،أ) $\in$ ر$_2$ في حين لا يمكن للعلاقـة التخالفية ان تحوي عناصر قطرية غير أن ر$_2$ متعديةلأن (أ،أ) و(أ،د) $\in$ ر$_2$ وكذلك (أ،د) $\in$ ر$_2$.

كما أنها لاتناظرية لأنه لا تحوي زوجين من الشكل (س،ع) و (ع،س).

٣ – العلاقة ر٣ متناظرة ومتعدية ولا متناظرة ولكنها ليست منعكسة ((حـ، حـ) ∉ ر٣) وليست تخالفية لأنها تحوي عناصر قطرية .

٤ – العلاقة ر٤ متعدية وتخالفية ولكنها ليست منعكسة وليست متناظرة وليست لامتناظره .

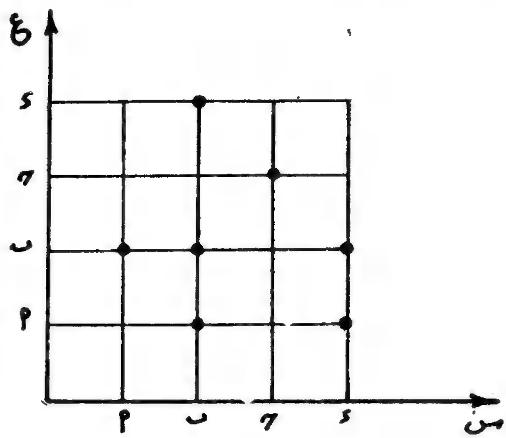
١٧٧ – لتكن ر علاقة معرفة في المجموعة س = {أ ، ب ، حـ ، ى} بالتمثيل الديكارتي التالي :

١ – بيّن صحة ما يلي :

حـ ر ب ، ى ر̄ أ ، أ ر̄ ى ، ب ر̄ ب

٢ – هل هذه العلاقة منعكسة ؟ متناظرة ؟ متعدية ؟

٣ – أوجد العلاقة العكسية ر$^{-1}$ ومثّلها سهمياً .



الشكل (١٠٧)

الحل :

ان بيان العلاقة ر هو :

ڡ ر = {(أ، ب) ، (ب، أ) ، (ب، ب) ، (ب، ى) ، (حـ، حـ) ،

(ء،أ) ، (ء،ب) } ومنه :

١ ــ حـ ر ب خطأ لأن (حـ،ب) $\notin$ ح ر ، ء $\overline{ر}$ أ خطأ لأن (ء،أ) $\in$ ح ر ، أ $\overline{ر}$ ء صح لأن (أ،ء) $\notin$ ح ر وأخيراً ب $\overline{ر}$ ب خطأ لأن (ب ، ب) $\in$ ح ر .

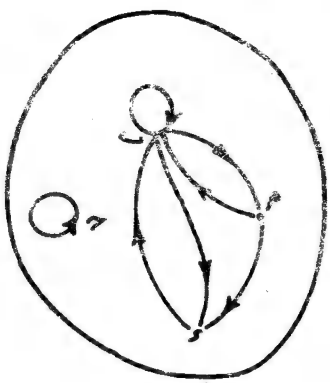
٢ ــ ان هذه العلاقة غير منعكسة لأن (أ،أ) $\notin$ ح ر وهي ليست متناظرة لأن النقاط التي تحققها ليست متناظرة مثنى مثنى بالنسبة للقطر فنجد مثلاً أنه ليس للنقطة (ء،أ) نظير بالنسبة للقطر .

وهي غير متعدية لان (أ،ب) و (ب،أ) $\in$ ح ر بينما (أ،أ) $\notin$ ح ر .

٣ ــ ان بيان العلاقة العكسية $ر^{-1}$ هو :

{ (ب،أ) ، (أ،ب) ، (ب،ب) ، (ب،ء) ، (حـ،حـ) ، (أ،ء) ، (ب،ء) } .

والتمثيل السهمي للعلاقة العكسية $ر^{-1}$ هو :



الشكل (١٠٨)

١٧٨ ــ أوجد خواص العلاقة ر المعرفة في المجموعة س مجموعة مثلثات المستوي ، بخاصة التشابه .

الحل :

إن بيان العلاقة ر هو :

ح = { (أ،ب) : (أ،ب) ∈ س × س و أ يشابه ب } .

ان كل مثلث أ يشابه نفسه أي (أ،أ) ∈ ح ∀ أ ∈ س فالعلاقة منعكسة .

إذا كان (أ،ب) ∈ ح أي المثلث أ يشابه المثلث ب فان ب يشابه أ أي (ب،أ) ∈ ح فالعلاقة متناظرة .

إذا كان (أ،ب) و (ب،حـ) ∈ ح أي أ يشابه ب و ب يشابه حـ فان أ يشابه حـ أي (أ،حـ) ∈ ح فالعلاقة متعدية . وبما ان العلاقة متناظرة فهي ليست تخالفية . وبسهولة نرى أنها ليست لاتناظرية .

١٧٩ – إذا عرفنا في المجموعة ط*، مجموعة الاعداد الطبيعية المغايرة للصفر، العلاقة ح بالخاصة س + ع = ١٠ ، أوجد خصائص هذه العلاقة .

الحل :

ان بيان هذه العلاقة هو :

ح = { (١،٩) ، (٢،٨) ، (٣،٧) ، (٤،٦) ، (٥،٥) ، (٦،٤) ، (٧،٣) ، (٨،٢) ، (٩،١) } .

العلاقة ح غير منعكسة لان (٤،٤) ∉ ح . وهي متناظرة لان ∀ (أ،ب) ∈ ح ⇐ (ب،أ) ∈ ح أو س + ع = ١٠ ⇐ ع + س = ١٠

وهي ليست لامتناظرة لان :

(١،٩) و (٩،١) ∈ ح بينما ١ ≠ ٩ . وهي غير متخالفة بوجود

العنصر القطري (٥،٥) وهي غير متعدية لان (٩،١) ، (١،٩) $\in$ ع
بينما (١،١) $\notin$ ع .

١٨٠ – اذا كانت ر١ و ر٢ علاقتين متناظرتين معرفتين في المجموعة سـ ، برهن أن ر١ $\cap$ ر٢ علاقة متناظرة في سـ .

الحل :

بما أن كلاً من العلاقتين ر١ و ر٢ تمثل مجموعة جزئية في المجموعة سـ $\times$ سـ فالعلاقة المعرفة بـ ر١ $\cap$ ر٢ تمثل مجموعة جزئية في المجموعة سـ $\times$ سـ وبالتالي فهي علاقة معرفة في المجموعة سـ .

إذا كان (أ،ب) $\in$ ر١ $\cap$ ر٢ فان (أ،ب) $\in$ ر١ وكذلك (أ،ب) $\in$ ر٢ . إن ر١ و ر٢ متناظرتان حسب الفرض فيكون :
(أ،ب) $\in$ ر١ $\Leftarrow$ (ب،أ) $\in$ ر١ و (أ،ب) $\in$ ر٢ $\Leftarrow$ (ب،أ) $\in$ ر٢
وبالتالي (ب،أ) $\in$ ر١ $\cap$ ر٢ فالعلاقة ر١ $\cap$ ر٢ متناظرة .

١٨١ – إذا كانت ر علاقة في المجموعة سـ و ر$^{-1}$ العلاقة العكسية، برهن صحة العلاقات التالية :

ر متناظرة $\Leftrightarrow$ ر$^{-1}$ متناظرة
ر متعدية $\Leftrightarrow$ ر$^{-1}$ متعدية

الحل :

إذا كانت ر متناظرة فان (أ،ب) $\in$ ر $\Leftarrow$ (ب،أ) $\in$ ر . ومن جهة ثانية (أ،ب) و (ب،أ) $\in$ ر $\Leftarrow$ (ب،أ) و (أ،ب) $\in$ ر$^{-1}$
إذن $\forall$ (ب،أ) $\in$ ر$^{-1}$ $\Leftarrow$ (أ،ب) $\in$ ر$^{-1}$ فالعلاقة ر$^{-1}$ متناظرة .

إذا كانت ر متعدية فإن (أ،ب) و (ب،حـ) $\in$ ر $\Leftarrow$ (أ،حـ) $\in$ ر

ومن جهة ثانية :

(أ،ب)، (ب،حـ)، (أ،حـ) ∈ ر ⇐ (ب،أ)، (حـ،ب)، (حـ،أ) ∈ ر$^{-1}$

إذن : ∀ (حـ،ب) ، (ب،أ) ∈ ر$^{-1}$ ⇐ (حـ،أ) ∈ ر$^{-1}$ فالعلاقة ر$^{-1}$ متعدية .

من أجل البرهان على صحة العلاقات السابقة في الاتجاه المعاكس يكفي أن نلاحظ أن العلاقة العكسية للعلاقة ر$^{-1}$ هي العلاقة ر الأصلية كما هو واضح من تعريف العلاقة العكسية .

١٨٢ – إذا كانت ر١ علاقة منعكسة معرفة في المجموعة سـ وكانت ر٢ علاقة ما معرفة في المجموعة نفسها ، برهن أن العلاقة ر١ ∪ ر٢ علاقة منعكسة .

الحل :

ان العلاقة ر١ منعكسة ⇐ س ر١ س ∀ س ∈ سـ .أو بعبارة ثانية :
∀ س ، ∈ سـ فان (س،س) ∈ ر١ وبما أن :

ر١ ⊆ ر١ ∪ ر٢ فإنه ∀ س ∈ سـ يكون (س، س) ∈ ر١ ∪ ر٢
فالعلاقة ر١ ∪ ر٢ منعكسة .

١٨٣ – لنأخذ في المجموعة سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } العلاقات التالية :

ر١ = { (١،٢) ، (٢،٢) }

ر٢ = { (١،٢) ، (٢،٣) ، (١،٣) ، (٢،١) ، (١،١) }

ر٣ = { (١،٢) } . بيّن فيما اذا كانت هذه العلاقات متعدية.

الحل :

أن العلاقة ر١ متعدية لأن (١،٢) و (٢،٢) ∈ ر١ وكذلك
(١،٢) ∈ ر٣ .

أمـا العلاقة $ر_2$ فليست متعدية لأن (٢،١) و (١،٢) $\in$ $ر_2$ بينما (٢،٢) $\notin$ $ر_2$.

وأما العلاقة $ر_3$ فهي متعدية وذلك لأن بيان هذه العلاقة لا يحوي زوجين من الشكل (س،ع) و (ع،ص) كما فعلنا ذلك في التمرين رقم ١٧٦ .

١٨٤ – لتكن $ر_1$ و $ر_2$ علاقتين معرفتين في الأعـداد الحقيقية ح بالخاصتين $س^2 + ع^2 \leqslant ٤$ و $س + ع \leqslant ٢$ على الترتيب .

١ – ابحث في الانعكاس والتناظر والتعدي لكل من $ر_1$ و $ر_2$ وأعط التمثيل الديكارتي لهما .

٢ – عيّن بيان العلاقة $ر_1 \cap ر_2$.

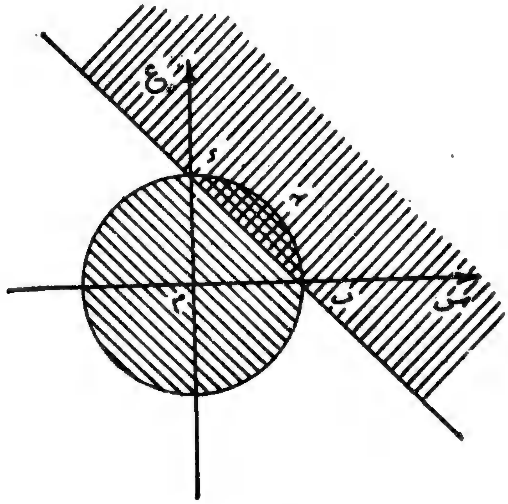
الحل :

١ – ان العلاقة $ر_1$ ليست منعكسة لأن ٣ $\in$ ح بينما $(٣)^2 + (٣)^2 > ٤$ أي (٣،٣) $\notin$ $ر_1$ ،وهي متناظرة لأنه $\forall$ (س،ع) $\in$ $ر_1$ أي $س^2 + ع^2 \leqslant ٤$ فان (ع، س) $\in$ $ر_1$ لأن $ع^2 + س^2 \leqslant ٤$. وهي أيضاً ليست متعدية لأن ($\sqrt{٣}$ ، ١) ، (١ ، $\sqrt{٢}$) $\in$ $ر_1$ بينما ($\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٢}$) $\notin$ $ر_1$ حيث ٣ + ٢ $>$ ٤ .

أما العلاقة $ر_2$ فليست منعكسة لأن ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$) $\notin$ $ر_1$.ومن الواضح أنها متناظرة ولكنها ليست متعدية لأن (١،٢) و (٢ ، $\frac{١}{٣}$) $\in$ $ر_2$ بينما (١ ، $\frac{١}{٣}$) $\notin$ $ر_2$ حيث ١ + $\frac{١}{٣}$ $>$ ٢ .

إن التمثيل الديكارتي للعلاقة $ر_1$ يعطى بمجموعة النقاط الواقعة داخل الدائرة (التي مركزها مبدأ الاحداثيات ونصف قطرها ٢) أو على محيطها .

بينما تعطى العلاقة ر٢ بمجموعة النقاط الواقعة على المستقيم ب ء الذي معادلته س + ع = ٢ أو على يمينه .



الشكل (١٠٩)

٢ – ان العلاقة ر١ ∩ ر٢ تمثل بمجموعة النقاط المحققة لكل من العلاقتين ر١ و ر٢ وهي النقاط المشتركة بين بياني هاتين العلاقتين أي نقاط الجزء الشبكي من الشكل .

١٨٥ – لتكن المجموعات الثلاث سـ = {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧}
و ع = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} و صـ = {١٢ ، ١٦} .

إذا كانت العلاقة ر١ معرفه من سـ إلى ع بالخاصة «س – ١ = ع» والعلاقة ر٢ معرفة من ع إلى صـ بالخاصة «٢ ع = ص» حيث س ∈ سـ و ع ∈ ع و ص ∈ صـ . أوجد العلاقة المركبة ر٢ ∘ ر١ ووضح ذلك بالمخطط السهمي .

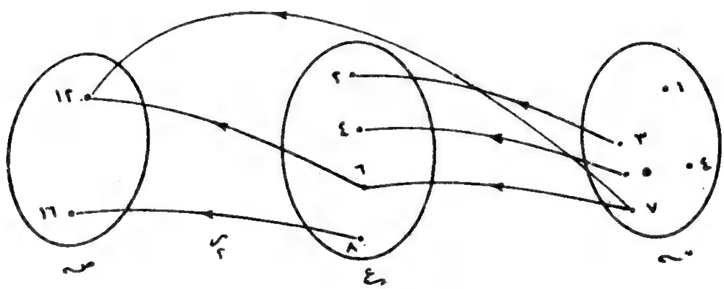
الحل :

ان بيان العلاقة ر هو :

$ج_{ر_١} = \{ (٣،٢) ، (٥،٤) ، (٧،٦) \}$. وبيان العلاقة $ر_٢$ هو :

$ج_{ر_٢} = \{ (٦،١٢) ، (٨،١٦) \}$.

إذن بيان العلاقة المركبة هو $\{ (٧،١٢) \}$ ويتضح هـــذا بالمخطط السهمي التالي :



الشكل (١١٠)

١٨٦ – إذا كانت $ر_١$ و $ر_٢$ علاقتي التوازي والتعامـد على مجموعـة المستقيمات في مستو على الترتيب ، برهن صحة ما يلي :

١) $ر_١ \circ ر_١ = ر_١$ ٢) $ر_١ \circ ر_٢ = ر_٢ \circ ر_١ = ر_٢$

٣) $ر_٢ \circ ر_٢ = ر_١$

الحـل :

١) إذا كان $(م_١ ، م_٢)$ و $(م_٢ ، م_٣) \ni ر_١$ فان $(م_١،م_٣) \ni ر_١ \circ ر_١$.
ومن جهة ثانية فان $(م_١ ، م_٣) \ni ر_١$ لأن المستقيمات الثلاثة $م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ متوازية . وعلى العكس إذا كان $(م_١ ، م_٣) \ni ر_١$ فيمكن إيجاد مستقيم $م_٢$ يوازي كلاً من $م_١$ و $م_٣$ وبالتالي فان $(م_١ ، م_٢)$ و $(م_٢ ، م_٣) \ni ر_١$ أي $(م_١ ، م_٣) \ni ر_١ \circ ر_١$ ، إذن $ر_١ \circ ر_١ = ر_١$.

٢) إذا كان $(م_١ ، م_٢) \ni ر_٢$ و $(م_٢ ، م_٣) \ni ر_١$ فان $(م_١ ، م_٣) \ni ر_١ \circ ر_٢$ ومن جهة ثانية يكون $م_٣$ موازياً $م_٢$ و $م_٢$ عمودياً

على $م_1$ اذن $م_1$ عمودي على $م_3$ أي $(م_1 ، م_3) \in ع_2$. وعلى العكس إذا كان $(م_1 ، م_3) \in ع_2$ أي $م_1$ عمودي على $م_3$ فيمكن إيجاد مستقيم $م_2$ يوازي $م_3$ فيكون عمودياً على $م_1$ أي $(م_2 ، م_3) \in ع_1$ و $(م_1 ، م_2) \in ع_2$ إذن $(م_1 ، م_3) \in ع_1 \circ ع_2$ وهذا يعني أن $ع_1 \circ ع_2 = ع_2$.

ولبرهان العلاقة $ع_2 \circ ع_1 = ع_2$ نأخذ $(م_1 ، م_2) \in ع_1$ و $(م_2 ، م_3) \in ع_2$ فيكون $(م_1 ، م_3) \in ع_2 \circ ع_1$. ومن جهة ثانية إذا كان $م_1 \parallel م_2$ و $م_2 \perp م_3$ فان $م_1 \perp م_3$ أي $(م_1 ، م_3) \in ع_2$. وعلى العكس إذا كان $(م_1 ، م_3) \in ع_2$ فانه يمكن إيجاد مستقيم $م_2 \parallel م_1 \Leftarrow م_2 \perp م_3$ ويكون $(م_1 ، م_2) \in ع_1$ و $(م_2 ، م_3) \in ع_2 \Leftarrow (م_1 ، م_3) \in ع_2 \circ ع_1$ أي $ع_2 \circ ع_1 = ع_2$.

٣) إذا كان $(م_1 ، م_2)$ و $(م_2 ، م_3) \in ع_2$ فإن المستقيم $م_2$ عمودي على كل من $م_1$ و $م_3$ وهذا يعني أن المستقيمين $م_1$ و $م_3$ متوازيان أي $(م_1 ، م_3) \in ع_1$. وعلى العكس إذا كان $(م_1 ، م_3) \in ع_1$ فيمكن ايجاد مستقيم $م_2$ عمودي على كل من $م_1$ و $م_3$ وبالتالي :

$(م_1 ، م_2)$ و $(م_2 ، م_3) \in ع_2 \Leftarrow (م_1 ، م_3) \in ع_2 \circ ع_2$

أي أن $ع_2 \circ ع_2 = ع_1$.

١٨٧ – نعرّف في المجموعة {أ ، ب ، حـ ، د ، هـ ، و} العلاقة ع بالبيان :

$ب_ع$ = {(أ،أ) ، (حـ،حـ) ، (حـ،د) ، (حـ،و) ، (د،حـ) ، (د،د) ، (د،و) ، (و،حـ) ، (و،د) ، (و،و)}

اعط التمثيل الديكارتي لهذه العلاقة وارسم المخطط السهمي لها ، ثم قرر فيما اذا كانت هذه العلاقة منعكسة ، متناظرة أو متعدية .

ما هو الخطأ المرتكب في المحاكمة التالية :

« ر علاقة ثنائية معرفة في سـ متناظرة ومتعدية فيكون لدينا :

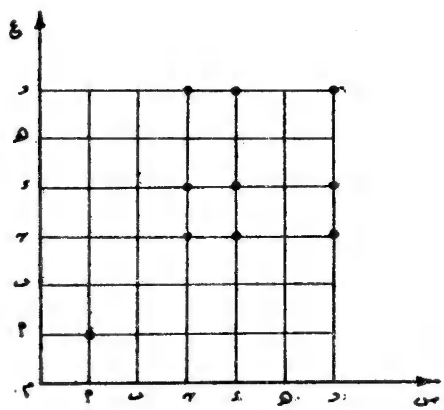
س ر ع ⇐ ع ر س (العلاقة متناظرة)

س ر ع و ع ر س ⇐ س ر س (العلاقة متعدية)

ينتج عما سبق أن العلاقة منعكسة » .

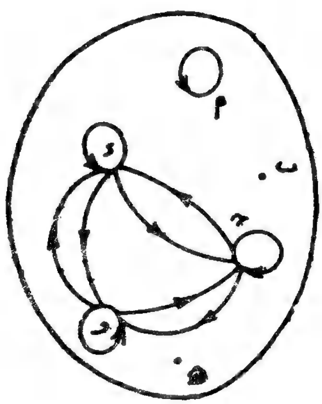
الحل :

إن التمثيل الديكارتي والمخطط السهمي للعلاقة ر هما :



التمثيل الديكارتي

الشكل (١١١)



المخطط السهمي

الشكل (١١٢)

ان العلاقة ر ليست منعكسة لأن (ب،ب) ∉ جـر . وهي متناظرة لأن التمثيل الديكارتي متناظر بالنسبة للقطر . وهي متعدية لأنه كلما انطلق سهم من عنصر من هذه المجموعة إلى عنصر ثان ، ثم تبعه سهم من هذا العنصر إلى عنصر ثالث فإن هنالك سهماً من العنصر الأول إلى العنصر الثالث ، كما انه كلما انطلق سهم من عنصر من هذه المجموعة إلى عنصر ثان ، ثم تبعه سهم من هذا العنصر إلى العنصر الأول نفسه فإن هنالك

منحنياً مغلقاً عند العنصر الأول ، أي أن هـذا العنصر مرتبط بنفسه وفق العلاقة المفروضة .

إن الخطأ في الحاكمة المعطاة ناتج عن أن وصف العلاقـة ر بأنهـا متناظرة لا يتطلب صحة العلاقة س ر ع ⇐ ع ر س من أجل كل زوج من الجداء سـ × سـ .

وكذلك فانه عندما نصف هـذه العلاقة بأنهـا متعدية فان ذلك لا يتطلب صحة العلاقة :

س ر ع و ع ر ص ⇐ س ر ص ∀ (س،ع) ، (ع،ص) ∈ سـ × سـ

بينما لا يمكننا أن نصف علاقة بكونها منعكسة ما لم تتحقق العلاقـة

س ر س ∀ س ∈ سـ

ومثال ذلك العلاقة التي درسناها أعلاه فهي علاقة متناظرة ومتعدية ولكنها غير منعكسة .

١٨٨ – لتكن سـ١ و سـ٢ مجموعتين منفصلتين تحويهما تماماً المجموعة سـ . ولنعرف العلاقة ر في سـ بالشكل

(س ، ع) ∈ ر ⇔ (س ∈ سـ١ و ع ∈ سـ٢)

بيّن فيما إذا كانت هذه العلاقة منعكسة ، متناظرة ، متعدية .

الحـل :

ان العلاقة ر ليست منعكسة لأنه ∀ س ∈ سـ١′ (متممة سـ١ وهي ليست خالية) فإن (س،س) ∉ ر . وهي غير متناظرة لأن (س،ع) ∈ ر ⇔ (س ∈ سـ١ و ع ∈ سـ٢) بينما لا يحقق الزوج (ع،س) العلاقة ر لأن ع ∉ سـ١ و س ∉ سـ٢ وذلك لأن هاتين المجموعتين منفصلتان

وأخيراً العلاقة ر متعدية لأن الاقتضاء :

$$(س ، ع) \text{ و } (ع ، ص) \in ر \Leftarrow (س ، ص) \in ر$$

محقق لأن الفرض (س،ع) و (ع،ص) ∋ ر لا يمكن أن يتحقق ، أي أنه لا يوجد عنصران من الشكل (س،ع) و (ع،ص) ينتميان لـ ر (انظر التمرين ١٧٦) .

١٨٩ – لتكن المجموعات الثلاث :

سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، صـ = { أ ، ب ، حـ ، ء } ،

$$ع = \left\{ \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٦} ، \frac{١}{٧} \right\}$$

ولتعرف العلاقتين ر من سـ الى صـ والعلاقـة ق من صـ الى ع بما يلي :

ر = { (٢،ب) ، (١،حـ) ، (٢،أ) ، (٤،حـ) ، (٥،أ) }

$$ق = \left\{ \left(أ ، \frac{١}{٤}\right) ، \left(أ ، \frac{١}{٧}\right) ، \left(ب ، \frac{١}{٤}\right) ، \left(حـ ، \frac{١}{٢}\right) ، \right.$$

$$\left. \left(حـ ، \frac{١}{٤}\right) ، \left(ء ، \frac{١}{٥}\right) \right\}$$

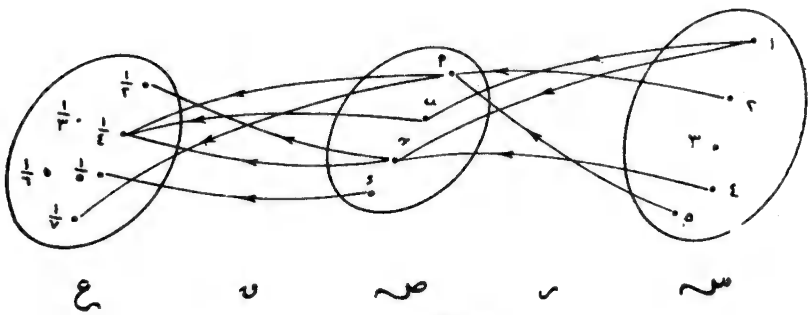
١ً – ارسم المخطط السهمي للعلاقة ر ثم للعلاقة ق وأخيراً للعلاقة ق ∘ ر واكتب عناصر العلاقة ق ∘ ر .

٢ً – ارسم المخطط السهمي للعلاقة $ر^{-١}$ ثم للعلاقة $ق^{-١}$ وأخيراً للعلاقة $ر^{-١} \circ ق^{-١}$ واكتب عناصر العلاقة $ر^{-١} \circ ق^{-١}$.

٣ً – تحقق من أن $(ق \circ ر)^{-١} = ر^{-١} \circ ق^{-١}$.

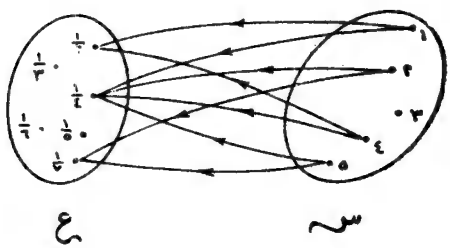
الحـل :

١ً – ان المخطط السهمي للعلاقتين ر و ن هو :



الشكل (١١٣)

إذن فالمخطط السهمي للعلاقة المركبة ن ० ر هو :



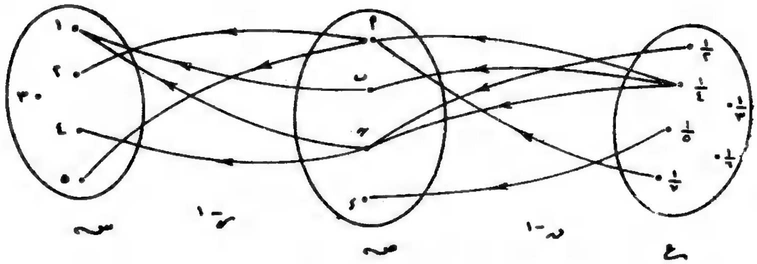
الشكل (١١٤)

وبيان العلاقة المركبة ن ० ر هو :

$$\{ (١ ، \frac{١}{٢}) ، (١ ، \frac{١}{٤}) ، (٢ ، \frac{١}{٤}) ، (٢ ، \frac{١}{٧}) ،$$

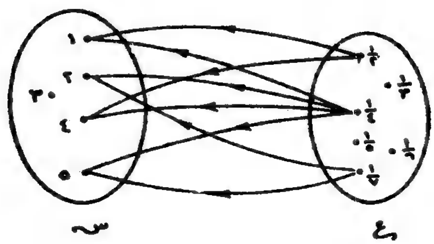
$$(٤ ، \frac{١}{٢}) ، (٤ ، \frac{١}{٤}) ، (٥ ، \frac{١}{٤}) ، (٥ ، \frac{١}{٧}) \} .$$

٢ً – المخطط السهمي للعلاقتين العكسيتين $ن^{-١}$ و $ر^{-١}$ هو :



الشكل (١١٥)

والمخطط السهمي للعلاقة المركبة $ر^{-١} \circ ت^{-١}$ هو :



الشكل (١١٦)

بيان العلاقة المركبة $ر^{-١} \circ ت^{-١}$ هو :

$$\{ (\frac{١}{٢} ، ١) ، (\frac{١}{٢} ، ٤) ، (\frac{١}{٤} ، ١) ، (\frac{١}{٤} ، ٢) ،$$

$$(\frac{١}{٤} ، ٤) ، (\frac{١}{٤} ، ٥) ، (\frac{١}{٧} ، ٢) ، (\frac{١}{٧} ، ٥) \} .$$

٣ – بمقارنة بيان العلاقة المركبة $ت \circ ر$ وبيان العلاقة المركبة $ر^{-١} \circ ت^{-١}$ نجد أن :

$$(ت \circ ر)^{-١} = ر^{-١} \circ ت^{-١}$$

ويمكن التحقق من هذا بمقارنة الشكل (١١٤) بالشكل (١١٦) والتأكد من أن أحدهما يطابق الثاني بعد تغيير اتجاه الأسهم .

تمارين غير محلولة

١٩٠ – لتكن سہ مجموعة سكان مدينة حلب . لنأخذ العلاقات المعرفة في سہ بالخواص التالية :

١ – س زوج لـ ع   ٢ – س أكبر سناً من ع   ٣ – س أخ لـ ع

حيث س ، ع ∈ سہ . اذكر خصائص كل من هذه العلاقات .

١٩١ – لنعتبر العلاقات المعرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية ط بالخواص التالية :

١ – أ > ب .   ٢ – أ من مضاعفات ب .

٣ – ٢ أ + ب = ٢٥ .

٤ – أ له رقم آحاد ب ، حيث أ، ب ∈ ط .

اذكر خصائص كل من هذه العلاقات .

١٩٢ – إذا كانت ر و ن علاقتين معرفتين في المجموعة سہ . برهن صحة ما يلي :

١ – ر لاتناظرية ⇔ $ر^{-1}$ لاتناظرية .

٢ – ر متعدية ⇔ $ر^{-1}$ متعدية .

٣ – ر تخالفية ⇔ $ر \cap ر^{-1} = \emptyset$.

٤ – ر متناظرة ، ن متناظرة ⇐ ر ∩ ن متناظرة .

٥ – $(ر \circ ن)^{-1} = ن^{-1} \circ ر^{-1}$.

٦ – ر لاتناظرية و ن لاتناظرية ⇐ ر ∪ ن لاتناظرية .

٧ – ر متعدية و ن متعدية ⇐ ر ∪ ن متعدية .

٨ – ر متناظرة ⇐ ر ∩ ر$^{-1}$ ≠ ∅ .

١٩٣ – لتكن ر علاقة معرفة في المجموعة سـ . لنرمز بـ ك للمجموعة القطرية في سـ × سـ (ك = { (س، س) : س ∈ سـ })

برهن صحة العلاقة :

ر لاتناظرية ⇔ ر ∩ ر$^{-1}$ ⊆ ك

١٩٤ – أوجد الصلة بين علاقة منعكسة ر في المجموعة سـ والمجموعة القطرية ، ك ، في سـ × سـ .

١٩٥ – اذا كانت ر علاقة متعدية في المجموعة سـ ، برهن أن بيان العلاقة المركبة ر ∘ ر مجموعة جزئية في بيان العلاقة ر .

١٩٦ – لتكن ر علاقة معرفة في مجموعة الدوائر في مستو بخاصة التمركز (أي : أ ر ب ⇔ لـ أ و ب مركز واحد) أوجد خواص هذه العلاقة .

١٩٧ – هل توجد مجموعة سـ بحيث تكون كل علاقة معرفة في سـ متناظرة ؟

١٩٨ – إذا كانت ر علاقة متناظرة ومتعدية في المجموعة سـ وكان ∀ س ∈ سـ ∃ ع ∈ سـ : س ر ع ، برهن أن ر منعكسة .

١٩٩ – لتكن ر و ن علاقتين معرفتين في مجموعة الأعداد الحقيقية ح بالخاصتين : س + ٢ ع ⩾ ٢ و س + ع ⩽ ١ على الترتيب .
اذكر خصائص كل من ر و ن ومثل ذلك ديكارتياً ثم أوجد العلاقة ر ∩ ن .

٢٠٠ – لتكن المجموعة سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } . اذكر العلاقة المقابلة لكل من البيانات التالية :

أ – { (٢،١) ، (٣،٤) ، (٤،٣) } .

ب – { (١،١) ، (٢،١) ، (٢،٢) ، (٣،١) ، (٣،٢) ، (٣،٣) ، (٤،١) ، (٤،٢) ، (٤،٣) ، (٤،٤) }

حـ – { (١،١) ، (٢،٢) ، (٣،٣) ، (٤،٤) } .

ء – { (١،١) ، (٢،١) ، (٣،١) ، (٤،١) ، (٢،٢) ، (٤،٢) ، (٣،٣) ، (٤،٤) } .

هـ – { (١،٢) ، (٢،٤) } .

٢٠١ – مثل ديكارتياً وسهمياً العلاقات التالية المعرفة من المجموعة سـ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } إلى المجموعة ع = { –١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } :

أ – س ≤ ع + ١ ، ب – س = ع٢

حـ – س/ع > ٠ ، ء – ٠ < س + ع ≤ ٤

هـ – |س – ع| < ٢ ، و – س٢ + ع٢ ≥ ٤

ز – س٢ = ع٢ ، ح – س + ع = مضاعف ٢

٢٠٢ – لتكن ج (سـ) مجموعة أجزاء المجموعة سـ ولنعرف فيها العلاقة « ب منفصلة عن حـ » حيث ب ، حـ ∈ ج (سـ) . بين الخواص التي تتمتع بها هذه العلاقة .

أجوبة وإرشادات

١٩٠ – ١ – متناظرة . ٢ – متعدية ، متخالفة .

٣ – منعكسة ، متناظرة ، متعدية .

١٩١ – ١ – متعدية ، متخالفة . ٢ – منعكسة ، لامتناظرة ، متعدية

٣ – لا تتمتع بأي صفة من الصفات المعروفة .

٤ – منعكسة ، متناظرة ، متعدية .

١٩٤ – المجموعة القطرية محتواة في بيان العلاقة العكسية .

١٩٦ – منعكسة ، متناظرة ، متعدية .

١٩٧ – المجموعة الخالية أو المجموعة ذات عنصر واحد .

٢٠٠ – ا – س – ١ = ع . ب – س ≥ ع .

حـ – س = ع . ء – س يقبل القسمة على ع .

ء – س ا ع حيث س المركبة الأولى و ع المركبة الثانية في كل زوج .

٢٠٢ – متناظرة .

الفصل السادس

علاقتا التكافؤ والترتيب

٦١ – علاقة التكافؤ :

Relation d'equivalence ، Equivalence relation

لنعرّف في س مجموعة سكان مدينة دمشق العلاقة ر بخاصة « السكن في شارع واحد » فاذا سكن علي في الشارع الذي يسكن فيه صلاح فإننا نقول إن علياً مكافىء لصلاح من حيث سكنهما في شارع واحد ويلاحظ بسهولة أن هذه العلاقة منعكسة ومتناظرة ومتعدية .

ولنعرف العلاقة ر في مجموعة الأعداد الصحيحة بالشكل :

ر = { (ﻫ ، ب) : (ﻫ ، ب) ∈ ص × ص و ﻫ – ب يقبل القسمة على ه } .

من المعروف أن :

« ﻫ – ب يقبل القسمة على ه » ⟺ « باقيا قسمة ﻫ و ب على ه متساويان » .

لذا نقول في هذه الحالة إن العددين ﻫ ، ب متكافئان من حيث باقي قسمتهما على ه . ويبرهن بسهولة أن هذه العلاقة منعكسة ومتناظرة ومتعدية .

تعريف : نقول عن علاقة ر معرفة في مجموعة ما سـ إنها علاقة تكافؤ فيما إذا كانت :

١ – منعكسة   ٢ – متناظرة   ٣ – متعدية

ونقول عن عنصرين أ، ب مرتبطين بعلاقة التكافؤ ر إنهما متكافئان وفق ر ونكتب :

$$أ \approx ب \quad أو \quad أ \equiv ب$$

مثال (١) : إن علاقة التوازي المعرفة في مجموعة مستقيمات المستوي هي علاقة تكافؤ وذلك لأنه إذا كان م ، $م_1$ ، $م_2$ ثلاثة مستقيمات كيفية من هذه المجموعه فإن :

١ – المستقيم م يوازي نفسه $م \parallel م$ فالعلاقة منعكسة .

٢ – اذا كان $م \parallel م_1$ فإن $م_1 \parallel م$ أي $م \parallel م_1 \Leftrightarrow م_1 \parallel م$ والعلاقة متناظرة .

٣ – اذا كان $م \parallel م_1$ و $م_1 \parallel م_2$ فإن $م \parallel م_2$ والعلاقة متعدية أي : $م \parallel م_1$ و $م_1 \parallel م_2 \Rightarrow م \parallel م_2$

مثال (٢) : إن علاقة التعامد بين مستقيمات المستوي ليست بعلاقة تكافؤ وذلك لأن م كمستقيم من هذه المجموعة لا يمكن أن يكون متعامداً مع نفسه والعلاقة ليست منعكسة وهـذا يكفي للبرهان على ان العلاقة المذكورة ليست بعلاقة تكافؤ .

مثال (٣) : إن قولنا « أ من عمر ب » من أجل طلاب مدرسة يعرف علاقة تكافؤ تجعل كل طالبين ولدا في عـام واحد متكافئين من حيث العمر .

مثال (٤) : لنرمز بالزوج (ﺃ ، ب) للعدد العادي ﺃ/ب حيث يمثل ﺃ صورة (بسط) الكسر و ب مخرج (مقام) الكسر ولنعرف في مجموعة الأعداد العادية العلاقة :

(ب، ﺣ) ر (س، ع) ⇔ ب . ع = س . ﺣ

إن هذه العلاقة علاقة تكافؤ لتمتعها بالخواص التالية :

١ - (ب، ﺣ) ر (ب، ﺣ) لأن ب.ﺣ = ﺣ.ب والعلاقة منعكسة

٢ - (ب، ﺣ) ر (س، ع) ⇐ (س، ع) ر (ب، ﺣ) وذلك لأن :

ب ع = س ﺣ ⇐ س ﺣ = ب ع والعلاقة متناظرة

٣ - (ب، ﺣ) ر (س، ع) و (س، ع) ر (ی، ﮬ) ⇐ (ب، ﺣ) ر (ی، ﮬ) وذلك لأن :

ب.ع = س ﺣ و س ﮬ = ی ع ⇐ ب ﮬ = ی ﺣ

لأنه اذا ضربنـا طرفي المساواة الأولى بـ ﮬ واستفدنا من المساواة الثانية نجد :

ع ب ﮬ = ع ی ﺣ

وبالتقسيم على ع (الذي لا يساوي الصفر) نجد :

ب ﮬ = ی ﺣ أي (ب، ﺣ) ر (ی، ﮬ) والعلاقة متعدية وهو المطلوب

٦٢ - أصناف (صفوف) التكافؤ

Classes d'équivalence . Equivalence Classes

إذا عدنا إلى المثال (١) فسوف نلاحظ أن علاقة التوازي المعرفة في مجموعة مستقيمات المستوي تقسم هذه المجموعة إلى مجموعات جزئية تتكون كل واحدة منها من جميع المستقيمات المتوازية فيما بينها ونقول إن مستقيمات كل من هذه المجموعات الجزئية متكافئة مع بعضها من حيث كونها موازية لواحد منها .

> **تعريف** : إذا عرفنا في المجموعة سـ علاقة تكافؤ ر وإذا كان أ عنصر كيفي من سـ فإننا نسمي المجموعة الجزئية من سـ التي تتكون من العناصر المكافئة لـ أ وفق ر **صنف تكافؤ** أ ونرمز له بـ **ص** (أ) وتسمى (أ) ممثل هذا الصنف .

ينتج من هذا التعريف

١ – كل عنصر س ∈ سـ ينتمي إلى صنف تكافؤ .

٢ – إذا اشترك صنفا التكافؤ **ص** (ب) ، **ص** (ح) بعنصر فإنهما متطابقان أي يمثلان مجموعة جزئية واحدة من سـ .

في الحقيقة إذا كان س ∈ **ص** (ب) و س ∈ **ص** (ح) وبما أن علاقة التكافؤ ر علاقة متناظرة ومتعدية فانه يكون :

س ر ب و س ر ح ⇔ ب ر س و س ر ح ⇒ ب ر ح

وإذا كان س$_{1}$ ∈ **ص** (ب) فإن س$_{1}$ ر ب وبما أن ب ر ح فإننا نجد س$_{1}$ ر ح أي س$_{1}$ ∈ **ص** (ح) . فكل عنصر من الصنف الأول هو عنصر من الصنف الثاني .

وبشكل مماثل نرى العكس فالصنفان متطابقان وهو المطلوب .

٣ – إذا كان ب، ح غير متكافئين وفق ر فإن المجموعتين الجزئيتين **ص** (ب) و **ص** (ح) منفصلتان وهذا يعني أنه لا يوجد بين هذين الصنفين أي عنصر مشترك أي :

ص (ب) ∩ **ص** (ح) = ∅

وذلك لأنه إذا كان س مشترك بين هذين الصنفين فإنهما سيكونان متطابقين ويكون ب ر حـ خلافاً لما فرضنا.

نلخص الخاصتين (٢) ، (٣) بقولنا :

إن كل صنفي تكافؤ للعلاقة ر إما أن يكونا منفصلين وإلا فانهما متساويان

٤ – نقول إن أصناف التكافؤ تجزئة للمجموعة سـ ونعني بذلك أن أصناف التكافؤ مجموعات جزئية من سـ غير خالية ومنفصلة مثنى مثنى واجتماعها يساوي المجموعة سـ نفسها أي :

$$\forall \text{أ} \in \text{سـ} \Rightarrow \text{صـ}(\text{أ}) \neq \emptyset$$

$$\forall \text{أ} ، \text{ب} \in \text{سـ} ، \text{أ} \not{\text{ر}}\, \text{ب} \Rightarrow \text{صـ}(\text{أ}) \cap \text{صـ}(\text{ب}) = \emptyset$$

$$\text{صـ}(\text{أ}) \cup \text{صـ}(\text{ب}) \cup \ldots = \text{سـ}$$

نسمي مجموعة أصناف تكافؤ المجموعة سـ وفق ر ناتج قسمة سـ على ر ونرمز لذلك بالشكل سـ/ر.

مثال (١) : إن علاقة التوازي المعرفة في مجموعة مستقيمات المستوي تجزيء هذه المجموعة إلى أصناف تكافؤ نسمي كل صنف منها منحى في هذا المستوي وهو مجموعة جزئية من مجموعة مستقيمات هذا المستوي مكونة من كل المستقيمات المتوازية فيما بينها.

مثال (٢) : إن التساوي المعرف في المجموعة سـ هو علاقة تكافؤ تجزيء هذه المجموعة إلى أصناف تكافؤ يتألف كل صنف منها من عنصر واحد أي :

$$\forall \text{س} \in \text{سـ} \quad \text{صـ}(\text{س}) = \{\text{س}\}$$

مثال (٣) : إذا عرفنا علاقة ر في مجموعة الأعداد الطبيعية ط بقولنا :
« إن العددين الطبيعيين ب ، حـ زوجيان أو فرديان معاً »

فإن ر علاقة تكافؤ تجزىء المجموعة ط إلى صنفي تكافؤ هما مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية ومجموعة الأعداد الطبيعية الفردية .

٦٣ – علاقة الترتيب Ordered relation ، Relation d'ordre :

إذا عرفنا في سكان مدينة ما العلاقة (ب سلف لـ حـ) فيما إذا كان ب هو حـ أو أحد والديه أو أحد أجداده فإننا نلاحظ أن هذه العلاقة :

١ً – منعكسة لأن ب سلف لـ ب مهما كان ب من سكان المدينة .

٢ً – متعدية لأنه إذا كان ب سلفاً لـ حـ ، و حـ سلفاً لـ ى ، فان ب سلف لـ ى .

٣ً – لاتناظرية لأنه إذا كان ب سلفاً لـ حـ ، و حـ سلفاً لـ ب ، فإن ب هي حـ نفسها .

وإذا عرفنا في المدن الواقعة على نهر الفرات علاقة بقولنا (ب أخفض من حـ) فيما إذا مر الماء في المدينة ب بعد مروره في المدينة حـ أو في الوقت ذاته ، فعندئذ نلاحظ أن هذه العلاقة تتمتع كذلك بالصفات الثلاث المذكورة قبل قليل .

(لقد أعطينا ، كما يلاحظ ، لكلمتي سلف واخفض في هذين المثالين معنى أوسع من المعنى المألوف حيث اعتبرنا الانسان سلفاً لنفسه واعتبرنا المدينة اخفض من نفسها) .

وبصورة عامة :

نقول عن علاقة ر معرّفة في مجموعة سـ إنها علاقة ترتيب فيما إذا كانت :
١ – منعكسة ٢ – لاتناظرية ٣ – متعدية

وإذا كان ب ر حـ وفق علاقة ترتيب فاننا نرمز لذلك عادة بالشكل :

ب $>$ حـ أو حـ $<$ ب

ونقرأ ذلك بقولنا : إن ب سابق لـ حـ أو واقع قبل حـ كما نقول إن حـ لاحق لـ ب أو واقع بعد ب .

مثال (١) : إن علاقة الاحتواء $\supseteq$ المعرفة في ع (سـ) مجموعة أجزاء المجموعة سـ هي علاقة ترتيب . لأنه اذا كان ب ، حـ ، ى ثلاث مجموعات جزئية من سـ فإنه يكون حسب تعريف الإحتواء :

١ — ب $\supseteq$ ب علاقة الاحتواء منعكسة

٢ — إذا كان ب $\supseteq$ حـ و حـ $\supseteq$ ب $\Leftarrow$ ب $=$ حـ العلاقة لاتناظرية

٣ — إذا كان ب $\supseteq$ حـ و حـ $\supseteq$ ى $\Leftarrow$ ب $\supseteq$ ى العلاقة متعدية

مثال (٢) : أن علاقة « يقسم » المعرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة ط* هي علاقة ترتيب. وذلك لأنها :

١ — منعكسة : $\forall$ ب $\in$ ط* ب | ب

٢ — لاتناظرية : ب | حـ و حـ | ب $\Leftarrow$ ب $=$ حـ

٣ — متعدية : ب | حـ ، حـ | ى $\Leftarrow$ ب | ى

مثال (٣) : ان العلاقة المألوفة $\leq$ المعرفة في مجموعة الأعداد العادية هي علاقة ترتيب لأنها ، كما هو واضح ، منعكسة ولاتناظرية ومتعدية .

٦٤ — الترتيب الكلي والترتيب الجزئي

Ordre total . Ordre partiel . Total ordre . Partial ordre

إذا درسنا علاقة الترتيب المعرفة في مجموعة الأعداد العادية ع والتي نرمز لها بـ $\leq$ فإننا نستنتج بسهولة أنه مهما كان العددان العاديان ب ، حـ

فإنهما يحققان واحدة على الأقل من العلاقتين ب ≼ حـ ، ب ≽ حـ أي إنهما يحققان العلاقة المركبة :

ب ≼ حـ أو ب ≽ حـ

نقول إن العلاقة ≼ المعرفة على ج هي علاقة ترتيب كلي وإن ج مرتبة كلياً بالعلاقة ≼ .

أما إذا عدنا إلى دراسة علاقة الإحتواء المعرفة في ج (سـ) مجموعة أجزاء المجموعة سـ فإننا نجد أزواجاً من عناصر هذه المجموعة لا تحقق علاقة الإحتواء بالشكل ⊂ ولا العلاقة المعاكسة ذات الشكل ⊃ نقول في هذه الحالة إن علاقة الإحتواء المعرفة في مجموعة أجزاء المجموعة سـ هي علاقة ترتيب جزئي وإن المجموعة ج (سـ) مرتبة جزئياً بهذه العلاقة.

نقول عن عنصرين ء ، هـ من مجموعة عرفنا فيها علاقة ترتيب إنهما متقارنان فيما اذا كان :

ء ر هـ أو هـ ر ء

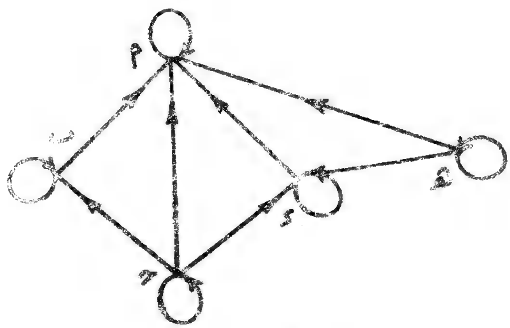
وإلا فإننا نقول إنهما غير متقارنين .

يرمز عادة لمجموعة سـ معرف عليها علاقة ر بالرمز (سـ ، ر) . فإذا كانت ر علاقة ترتيب كلي قلنا ان (سـ ، ر) مرتبة كلياً وإلا قلنا إن (سـ ، ر) مرتبة جزئياً .

إن (ط ، ≤) مرتبة ترتيباً كلياً بينما (ج ، ⊆) مرتبة ترتيباً جزئياً .

٦٥ — التمثيل البياني لعلاقة الترتيب : لقد اصطلح أن نمثل علاقة ترتيب معرفة على مجموعة منتهية سـ بأن نرمز لعناصر هذه المجموعة بنقاط ونصل بين كل زوج محقق لعلاقة الترتيب المفروض بسهم ينطلق من المركبة الأولى لهذا الزوج ليستقر في المركبة الثانية . ولكي نبين أن هذه العلاقة منعكسة نرسم من كل نقطة من هذه النقاط منحنياً مغلقاً يبدأ من هذه النقطة وينتهي فيها .

مثال (١) : إن العلاقة المعرفة بالمخطط السهمي المرافق في المجموعة
{أ، ب، حـ، د، هـ}



الشكل (١١٢)

هي علاقة ترتيب جزئي تحققها الأزواج :

(حـ، ب) و (ب، أ) و (حـ، أ) و (حـ، د) و (د، أ) و
(هـ، د) و (هـ، أ) و (أ، أ) و (ب، ب) و (حـ، حـ) و
(د، د) و (هـ، هـ)

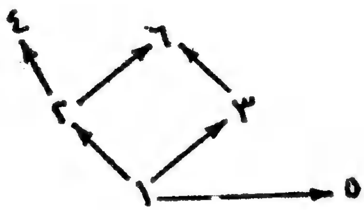
وغير محققة من قبل الأزواج :

(أ، د) و (أ، ب) و (أ، حـ) و (أ، هـ) و (ب، حـ) و
(ب، د) و (ب، هـ) و (حـ، هـ) و (هـ، حـ) و (هـ، ب) و
(د، حـ) و (د، هـ) و (د، ب) .

لسهولة الرسم يرى بعض المؤلفين أن تمثل علاقة ترتيب (معروفة مقدماً) بمجموعة من النقاط يصل بين مركبتي كل زوج مرتب بهذه العلاقة سهم باتجاه الترتيب أو عدة أسهم متلاحقة من الاتجاه ذاته تمر بنقاط أخرى .

مثال : (٢) إن علاقة الترتيب المعرفة بـ (يقسم) على المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} تمثل بالمخطط السهمي المرافق وهي علاقة ترتيب جزئي لأن المخطط يحوي أزواجاً لا تتصل مركباتها ببعضها بسهم واحد أو

بأكثر من سهم من اتجـاه واحد مثل : (٥،٣) ، (٥،٦) ، (٢،٣) ، (٤،٦) .



الشكل (١١٨)

تعاريف :

١ – إذا وجد في مجموعة سـ مرتبة عنصر ب بحيث : ب < س ∀ س ∈ سـ فإننا نسميه العنصر الاول في هذه المجموعة . وإذا وجد في سـ عنصر ب بحيث : ب > س ∀ س ∈ سـ فإننا نسميه العنصر الاخير في هذه المجموعة .

مثال (١) : إن الصفر هو العنصر الأول في مجموعة الأعداد الطبيعية وفق علاقة الترتيب < . ليس لهذه المجموعة عنصر أخـير وفق علاقة الترتيب هذه .

مثال (٢) : ان الصفر هو العنصر الأخير في مجموعـة الاعداد الصحيحـة السالبة والصفر ، وليس لهذه المجموعة عنصر أول وفق علاقة الترتيب < .

مثال (٣) : نلاحظ في المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } التي عرفنا فيها علاقة ترتيب « يقسم » أن العدد (١) هو عنصر أول في هذه المجموعة لأنه يقسم كل عنصر من عناصر هذه المجموعة وليس لها عنصر أخير لانه لا يوجد أي عدد من هذه المجموعة يقبل القسمة على كل واحد منها .

٢ – لتكن المجموعة المرتبة (سـ ، ر) وليكن أ ، ب عنصرين متقارنين وفق العلاقة ر بالشكل أ > ب . تعطى عادة التعاريف التالية :

١ – المجال المفتوح الذي يبدأ بـ أ وينتهي بـ ب هو المجموعة الجزئية في سـ المكونة من العناصر س المحققة للعلاقة :

أ > س > ب ، س ≠ أ ، س ≠ ب . . . . (*)

نرمز لهذا المجال المفتوح بـ] أ ، ب [.

٢ – المجال المغلق الذي مبدؤه أ ونهايته ب هو المجموعة الجزئية في سـ المكونة من العناصر س المحققة للعلاقة (*) بالاضافة الى العنصرين أ ، ب ونرمز له بـ [أ ، ب] .

٣ – المجال المفتوح من اليمين الذي مبدؤه أ ونهايته ب هو المجموعة الجزئية في سـ المكونة من العناصر المحققة للعلاقة (*) بالاضافة إلى ب ونرمز له بـ] أ ، ب] .

٤ – المجال المفتوح من اليسار الذي مبدؤه أ ونهايته ب هو المجموعة الجزئية في سـ المكونة من العناصر المحققة للعلاقة (*) بالاضافة إلى أ ونرمز له بـ [أ ، ب [.

مثال : إذا عرفنا في المجموعة سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } علاقة الترتيب « يقسم » فإنه يكون :

] ٢ ، ٨ [= { ٤ }

[٣ ، ٩] = { ٣ ، ٩ }

[١ ، ٦ [= { ١ ، ٢ ، ٣ }

] ١ ، ٩] = { ٣ ، ٩ }

تمارين محلولة

علاقة التكافؤ :

٢٠٣ – نعرف في مجموعة الأعداد الصحيحة ص علاقة ثنائية ~ بما يلي :

س ~ ع ⟺ (∃ ه ∈ ص ، س − ع = ٦ ه)

برهن أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ وعيّن أصناف تكافؤ هذه العلاقة.

الحـل :

إن هذه العلاقة علاقة تكافؤ لأنها :

١ – منعكسة : س ~ س لأن س − س = ٠ = ٦ × ٠ ، ٠ ∈ ص

٢ – متناظرة : س ~ ع ⟹ ع ~ س لأن :

[س − ع = ٦ ه ⟹ ع − س = ٦ ه'] حيث ه' = − ه

٣ – متعدية : (س ~ ع ، ع ~ ك) ⟹ س ~ ك وذلك لأن :

[س − ع = ٦ ه و ع − ك = ٦ ه'] ⟹ س − ك = ٦ (ه + ه') ؛ ه + ه' ∈ ص

أصناف تكافؤ هذه العلاقة هي ما يلي حيث ه ∈ ص :

ص٠ = { س : س = ٦ ه } ، ص١ = { س : س = ٦ ه + ١ }

ص٢ = { س : س = ٦ ه + ٢ } ، ص٣ = { س : س = ٦ ه + ٣ }

ص٤ = { س : س = ٦ ه + ٤ } ، ص٥ = { س : س = ٦ ه + ٥ }

٤٠٢ – نعرف في ح* ، مجموعة الاعداد الحقيقية غير المعدومة ، علاقة ثنائية ر بالشكل :

س ر ع ⇔ س . ع > ٠ أي س و ع من إشارة واحدة .

برهن أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ . ما هي أصناف تكافؤ هذه العلاقة .

إذا عرفنا في ح العلاقة ه بالشكل :

س ه ع ⇔ س . ع ≥ ٠

هل هذه العلاقة علاقة تكافؤ ؟

الحل :

إن العلاقة : س ر ع ⇔ س . ع > ٠ المعرفة في ح* هي علاقة تكافؤ لانها تتمتع بالخواص الثلاث التالية :

١ – منعكسة : ∀ س ∈ ح* س . س > ٠ .

٢ – متناظرة : إذا كان س . ع > ٠ فإن ع . س > ٠ أي :

س ر ع ⇐ ع ر س

٣ – متعدية : إذا كان س . ع > ٠ و ع . ص > ٠ فان :

س . ص > ٠

أي إذا كان س و ع من إشارة واحدة وكان ع و ص من إشارة واحدة فان س،ص من إشارة واحدة هي الإشارة المشتركة بين (س،ع،ص) ونكتب ذلك :

س ر ع و ع ر ص ⇐ س ر ص

لهذه العلاقة صنفا تكافؤ فقط هما مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ومجموعة الأعداد الحقيقية السالبة .

أما اذا عرفنا في المجموعة ح كاملة بما فيها الصفر العلاقة س • ع ≤ •
فإن هذه العلاقة :

١ – منعكسة لأن س • س ≤ • ∀ س ∈ ح

٢ – متناظرة لأنه اذا كان س • ع ≤ • فان ع • س ≤ •

٣ – غير متعدية دوماً لأن علاقة الاقتضاء :

س • ع ≤ • و ع • ص ≤ • ⇐ س • ص ≤ •

غير محققة مثلاً من أجل س = – ٣ ، ع = • ، ص = + ٣ إذ أن الزوج (– ٣ ، •) يحقق العلاقة الاولى س • ع ≤ • والزوج (• ، + ٣) يحقق العلاقة الثانية ع • ص ≤ • بينما لا يحقق الزوج (– ٣ ، + ٣) العلاقة س • ص ≤ •

إن ما تقدم يبرهن على أن العلاقة س • ع ≤ • المعرفة في المجموعة ح ليست بعلاقة تكافؤ لانها علاقة غير متعدية .

٢٠٥ – نعرف في ج (س) مجموعة أجزاء س العلاقة :

ب ر حـ ⇔ (هـ ∩ ب = هـ ∩ حـ) حيث هـ عنصر معين من ج(س)

١ – برهن أن العلاقة ر علاقه تكافؤ وعيّن أصناف التكافؤ .

٢ – برهن صحة العلاقة التالية :

ب ≈ حـ (وفق ر) ⇔ (ب Δ حـ) ∩ هـ = ∅

٣ – ماذا يصبح شكل العلاقة ر اذا كان هـ = ∅ أو هـ = س ؟

الحل :

ان العلاقة ر علاقة تكافؤ لأنها :

١ – منعكسة : ب ر ب ⇔ هـ ∩ ب = هـ ∩ ب وهذا صحيح .

٢ً – متناظرة : ب ر ح ⇐ ح ر ب لأن :

ه ∩ ب = ه ∩ ح ⇐ ه ∩ ح = ه ∩ ب

٣ً – متعدية : ب ر ح و ح ر ء ⇐ ب ر ء وذلك لأن :

[ه ∩ ب = ه ∩ ح] و [ه ∩ ح = ه ∩ ء] ⇐ ه ∩ ب = ه ∩ ح

لأن علاقة تساوي المجموعات علاقة متعدية .

أصناف تكافؤ هذه العلاقة :

إن ب ≈ ح (وفق ر) ⇔ ه ∩ ب = ه ∩ ح = ه$_1$

(ه$_1$ مجموعة جزئية من ه) .

وبما أن : ه ∩ ه$_1$ = ه ∩ ب = ه ∩ ح = ه$_1$

فإن المجموعات الثلاث ه$_1$ ، ب ، ح وكل مجموعة مكافئة لواحدة منها متكافئة (وفق ر) وهي تكوّن صنف تكافؤ تمثله ه$_1$ نرمز له بـ **ص** (ه$_1$) إذا بدلنا بـ ه$_1$ كل مجموعة جزئية من ه فسوف نحصل على أصناف تكافؤ هذه العلاقة لأن :

١ً – هذه الأصناف غير خالية لأن كل واحد منها يحوي ممثله على الاقل.

٢ً – هذه الاصناف منفصلة لانه اذا كان ه$_1$ ≠ ه$_2$ وحوى الصنفان **ص** (ه$_1$) و **ص** (ه$_2$) عنصراً مشتركاً ب مثلاً فسوف يكون:

ه ∩ ب = ه ∩ ه$_1$ = ه$_1$ ، ه ∩ ب = ه ∩ ه$_2$ = ه$_2$

وهذا يؤدي ه$_1$ = ه$_2$ خلافاً لما فرضنا .

٣ً – كل عنصر ء من ج (س) ينتمي إلى واحد من هذه الاصناف وذلك لأنه إذا كان ه ∩ ء = ه$_2$ (قد تكون ه$_2$ مجموعة خالية) فإن :

ه ∩ ء = ه ∩ ه$_2$ = ه$_2$ وهذا يعني أن ء ∈ **ص** (ه$_2$) .

٢ – إن هذه العلاقة صحيحة لأن :

$$(\text{ب}\,\Delta\,\text{ح})\cap\text{هـ}=\varnothing \Leftrightarrow (\text{ب}\cap\text{هـ})\,\Delta\,(\text{ح}\cap\text{هـ})=\varnothing$$

(خاصة توزيع $\cap$ على Δ)

$$\Leftrightarrow \text{ب}\cap\text{هـ}=\text{ح}\cap\text{هـ}$$ (من خواص Δ)

$$\Leftrightarrow \text{ب}\approx\text{ح}$$ (وفق ر)

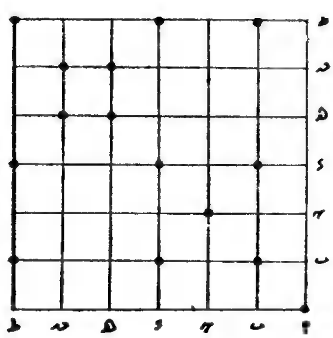
٣ – اذا كان هـ $=\varnothing$ فإن العلاقة $\varnothing\cap\text{ب}=\varnothing\cap\text{ح}$ محققة دوماً
ونقول في هذه الحالة إن العلاقة ر محققة دوماً فهي مطابقة .
أما اذا كان هـ $=$ سـ فإنه تكون :

$$\text{سـ}\cap\text{ب}=\text{سـ}\cap\text{ح}\Leftrightarrow\text{ب}=\text{ح}$$

أي ب ر ح $\Leftrightarrow$ ب $=$ ح والعلاقة ر هي علاقة التساوي .

٢٠٦ – برهن أن العلاقة المعرفة في المجموعة { أ، ب، ح، د، هـ، و، ط } بالتمثيل الديكارتي التالي هي علاقة تكافؤ :

الحل :



الشكل (١١٩)

إن هذه العلاقة علاقة تكافؤ لانها :

١ – منعكسة إذ أنها تحوي جميع العناصر القطرية .

٢ – متناظرة إذ ان النقاط المحققة لهذه العلاقة متناظرة بالنسبة للقطر . يقابل كل زوج من الشكل (س، ع) محقق للعلاقة الزوج (ع، س) المناظر للقطر يحقق العلاقة المفروضة .

٣ – متعدية لأن الأزواج الممثلة للنقاط الواقعة على هذا الشكل تحقق العلاقة :

فمثلاً (س، ع) و (ع، ص) من الشكل ⇐ (س، ع) من الشكل
(ب، ى) و (ى، ط) من الشكل ⇐ (ب، ط) من الشكل

٢٠٧ – نقول عن علاقة ر معرفة في المجموعة سـ إنها دائرية فيما إذا حققت :

ب ر حـ و حـ ر ى ⇐ ى ر ب

برهن أنه إذا كانت علاقة منعكسة دائرية فإنها تكون علاقة تكافؤ وعلى العكس كل علاقة تكافؤ هي علاقة دائرية .

الحل :

بما أن العلاقة ر منعكسة فإنه ∀ ب ∈ سـ ، ب ر ب

وبما أن العلاقة دائرية فانه :

(حـ ر ب) و (ب ر ب) ⇐ ب ر حـ

وهذا يعني ان العلاقة ر متناظرة .

وبما أن العلاقة ر متناظرة فإن :

(ب، حـ) و (حـ، ى) ⇐ (ى، ب) ⇐ (ب، ى)

والعلاقة ر علاقة متعدية وبذلك يبرهن المطلوب .

العكس : إذا كانت العلاقة ر علاقة تكافؤ فإنها منعكسة ومتناظرة ومتعدية أي :

ب ر حـ و حـ ر ى ⇐ ى ر ب ⇐ ب ر ى

أي أن العلاقة دائرية .

٢٠٨ – لتكن ر علاقة معرفة في المجموعة سـ وليكن ﻫ بيان هـذه العلاقة ولنرمز بـ Δ للعناصر القطرية في الجداء سـ × سـ و ﻫ ⁻¹ بيان العلاقة العكسية .

١ – برهن أن قولنا : العلاقة ١َ – منعكسة . ٢َ – متناظرة .
٣َ – متعدية ، تكافىء على الترتيب :

١َ – Δ ⊆ ر   ٢َ – ر^{-١} = ر   ٣َ – ر ∘ ر ⊆ ر

٢ – برهن أن الشرطين (١َ) ، (٣َ) يؤديان الى ر ∘ ر = ر

الحل :

١َ – ان قولنا ∀ ب ∈ س ، ب ر ب ⇔ ∀ ب ، (ب، ب) ∈ ر

وبالعكس إذا كان Δ ⊆ ر فان (ب، ب) ∈ ر ، ∀ ب ∈ س
أي ب ر ب ، ∀ ب ∈ س

٢َ – اذا كان (ب، ح) ∈ ر فان (ح، ب) ∈ ر^{-١} (حسب تعريف العلاقة العكسية) .

وبما أن العلاقة متناظرة :
فان (ب، ح) ∈ ر ⇐ (ح، ب) ∈ ر ⇐ (ب، ح) ∈ ر^{-١}

أي ∀ (ب، ح) ∈ ر ⇐ (ب، ح) ∈ ر^{-١}

وبصورة مماثلة ∀ (ح، ب) ∈ ر^{-١} ⇐ (ح، ب) ∈ ر

وهذا يعني أن ر = ر^{-١}

وعلى العكس اذا كان ر = ر^{-١} فانه يكون .
∀ (ب، ح) ∈ ر ⇔ (ب، ح) ∈ ر^{-١}

ولكن (ب، ح) ∈ ر ⇐ (ح، ب) ∈ ر^{-١} ⇐ (ح، ب) ∈ ر

وهذا ما يبرهن على أن العلاقة ر علاقة متناظرة .

٣َ – إذا كانت العلاقة متعدية فإنه يكون :

(ب، ح) ∈ ر و (ح، ء) ∈ ر ⇐ (ب، ء) ∈ ر

إذا حقق (ب،ح) العلاقة ر وحقق (ح،ى) العلاقـة ر فإن (ب،ى) يحقق العلاقة المركبة ر ٥ ر أي أن (ب،ى) ∋ Ↄ ٥ Ↄ وهـو ينتمي بالوقت ذاته إلى Ↄ وهذا يؤدي إلى العلاقة Ↄ ٥ Ↄ ⊇ Ↄ

وعلى العكس إذا كان Ↄ ٥ Ↄ ⊇ Ↄ وكان

(ب،ح) ∋ Ↄ و (ح،ى) ∋ Ↄ فإن (ب،ى) ∋ Ↄ

وهذا ما يفسر قولنا إن العلاقة متعدية .

٢ – إذا تحقق الشرط الأول فهذا يعني ∀ ب ∋ سـ فإن (ب، ب) ∋ Ↄ

لقد برهنا أن Ↄ ٥ Ↄ ⊇ Ↄ ولنبرهن الآن أن كل عنصر من Ↄ يقع في Ↄ ٥ Ↄ .

لنفرض (ب ، ح) ∋ Ↄ واستنـاداً إلى الشرط (١) يكون أيضاً (ح،ح) ∋ Ↄ وينتج عن هذا أن (ب،ح) ∋ Ↄ ٥ Ↄ وهذا مـا يبرهن على أن :

Ↄ ⊇ Ↄ ٥ Ↄ

وبالإضافة إلى الشرط (٣) يكون :

Ↄ = Ↄ ٥ Ↄ

٢٠٩ – لتكن المجموعة سـ = { أ ، ب ، ح ، ى ، هـ ، ن } . برهن أن المجموعات الجزئية { أ ، ب ، ح } و { ى ، هـ } و { ن } تشكل تجزئة للمجموعة سـ وأنها تعرف علاقـة تكافؤ ر في المجموعة سـ معطاة بالشكل :

س ر ع ⟺ س ، ع ينتميان إلى المجموعة الجزئية نفسها .

الحل :

لدينا : { أ ، ب ، ح } ∩ { ى ، هـ } = ∅

{ أ ، ب ، ح } ∩ { ن } = ∅

{ ى ، هـ } ∩ { ن } = ∅

و $\{ أ ، ب ، حـ \} \cup \{ د ، هـ \} \cup \{ ن \} =$ سـ

وإذا لاحظنا أن هـذه المجموعات الجزئية ليست خالية فإننـا نستطيع القول إن هذه المجموعات الجزئية تشكل تجزئة لـ سـ .

إن العلاقة ر علاقة تكافؤ لأنها :

١ً – منعكسة س ر س

٢ً – متناظرة س ر ع $\Leftarrow$ ع ر س

٣ً – متعدية (س ر ع) $\wedge$ (ع ر ص) $\Leftarrow$ س ر ص

٢١٠ – لتكن المجموعة سـ $= \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ \}$. بيّن فيما إذا كانت كل من جماعة المجموعات الجزئية التالية تجزئة للمجموعة سـ :

١) $\{ \{ ١ ، ٣ \} ، \{ ٢ \} \}$

٢) $\{ \{ ١ ، ٤ \} ، \{ ٢ \} ، \{ ٣ \} \}$

٣) $\{ \{ ١ ، ٢ ، ٤ \} ، \{ ٣ ، ٢ \} \}$

٤) $\{ \{ ١ \} ، \{ ٢ ، ٣ \} ، \{ ٤ \} \}$

الحـل :

كي تكون جماعة مجموعات جزئية لمجموعة ما ، تجزئة لهذه المجموعة ، يجب أن تحقق ثلاثة شروط : أولاً أن تكون عناصر هذه الجماعة ليست خالية . ثانياً : المجموعات الجزئية منفصلة فيما بينها . ثالثاً : أن يكون اجتماعها هو المجموعة الأصلية . لنطبق هذا على المجموعات المعطاة فمن أجل :

١) المجموعات الجزئية منفصلة ولكن اجتماعها لا يساوي المجموعة سـ اذن لا تشكل تجزئة للمجموعة سـ .

٢) إن عناصر هذه الجماعة ليست خالية كما أن المجموعات الجزئية منفصلة واجتماعها يساوي المجموعة سـ اذن تشكل تجزئة للمجموعة سـ .

٣) إن المجموعتين الجزئيتين غير منفصلتين اذن لا تشكلان تجزئة .

٤) إن عناصر الجماعة ليست خالية والمجموعات الجزئية منفصلة واجتماعها يساوي المجموعة $س$ فهي تشكل تجزئة للمجموعة $س$.

٢١١ – لتكن المجموعتان $س$ و $ع$ غير الخاليتين ولنفرض أن المجموعات الجزئية $س_1$ ،$س_2$ ،$س_3$ في $س$ تشكل تجزئة للمجموعة $س$.
برهن أن المجموعات الجزئية $س_1 \times ع$ ، $س_2 \times ع$ ، $س_3 \times ع$ تشكل تجزئة للمجموعة $س \times ع$.

الحل :

بما أن $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ تشكل تجزئة لـ $س$ فهي تحقق العلاقات التالية :

$$س_1 \cap س_2 = س_2 \cap س_3 = س_1 \cap س_3 = \emptyset$$

و $س_1 \cup س_2 \cup س_3 = س$.

لكي تشكل المجموعات الجزئية غير الخالية $س_1 \times ع$ ، $س_2 \times ع$ ، $س_3 \times ع$ تجزئة المجموعة $س \times ع$ ، يجب أن تكون منفصلة فيما بينها واجتماعها يساوي $س \times ع$. لنتحقق من هذه الأشياء :

$$(س_1 \times ع) \cap (س_2 \times ع) = (س_1 \cap س_2) \times ع$$

(الخاصة التوزيعية للجداء الديكارتي مع التقاطع)

$= \emptyset \times ع$ (حسب الفرض)

$= \emptyset$ (حسب الخاصة الأولى من خواص الجداء الديكارتي)

كذلك $(س_1 \times ع) \cap (س_3 \times ع) = (س_1 \cap س_3) \times ع$

$= \emptyset \times ع = \emptyset$

$(س_2 \times ع) \cap (س_3 \times ع) = (س_2 \cap س_3) \times ع$

$= \emptyset \times ع = \emptyset$

وأخيراً :

$$(س_1 \times ع) \cup (س_2 \times ع) \cup (س_3 \times ع)$$

$$= \left((س_1 \cup س_2) \times ع \right) \cup (س_3 \times ع)$$

(الخاصة التوزيعية للجداء الديكارتي مع الاجتماع)

$$= (س_1 \cup س_2 \cup س_3) \times ع$$ (حسب الفرض)

$$= س \times ع$$ وهو المطلوب

علاقة الترتيب :

٢١٢ – إذا كانت ر علاقة ترتيب في المجموعة س . برهن أن العلاقة العكسية ، $ر^{-1}$ ، علاقة ترتيب على س .

الحل :

إن العلاقة ر ، باعتبارها علاقة ترتيب ، منعكسة ولامتناظرة ومتعدية وتكون العلاقة $ر^{-1}$.

١ – منعكسة وذلك لأن (أ،أ) ∈ ر ⇐ (أ،أ) ∈ $ر^{-1}$

٢ – لامتناظرة لأنه إذا كان (أ،ب) و (ب،أ) ∈ ر ⇐ أ = ب
فإن : (ب،أ) و (أ،ب) ∈ $ر^{-1}$ ⇐ ب = أ

٣ – متعدية لأنه إذا كان
(أ،ب) و (ب،حـ) ∈ ر ⇐ (أ،حـ) ∈ ر
فإن (ب،أ) و (حـ،ب) ∈ $ر^{-1}$ ⇐ (حـ،أ) ∈ $ر^{-1}$
فهي علاقة ترتيب .

٢١٣ – ر علاقة معرفة في المجموعة س . و ف مجموعة جزئية في س
لنرمز بـ $ر_ف$ للعلاقة المعرفة بمجموعة الأزواج المرتبة :

$\rho_1 = \rho \cap (ف \times ف)$ برهن صحة العلاقة :

ρ علاقة ترتيب في $\mathcal{S}$ $\Leftarrow$ ρ_1 علاقة ترتيب في ف .

الحل :

ان بيان العلاقة ρ_1 تحتوى فى مجموعة الجداء الديكارتي ف × ف .

فالعلاقة ρ_1 علاقة معرفة في المجموعة ف .

إن العلاقة ρ_1 هذه علاقة ترتيب لأنها :

١ – منعكسة لأن $\forall$ ب ∋ ف فإن :

(ب،ب) ∋ ρ ∧ (ب،ب) ∋ ف × ف $\Leftarrow$ (ب،ب) ∋ ρ_1

٢ – لامتناظرة لأنه إذا كان ب،حـ ∋ ف و[(ب،حـ)و(حـ،ب)∋ ρ_1]

فان (ب،حـ) و (حـ،ب) ∋ ρ $\Leftarrow$ ب = حـ .

٣ – متعدية لأنه إذا كان (ب،حـ) و (حـ،ى) ∋ ρ_1 فان :

(ب،حـ) و (حـ،ى) ∋ ρ $\Leftarrow$ (ب،ى) ∋ ρ ومن جهة ثانية لدينا

(ب،ى) ∋ ف × ف وبالتالي فان (ب،ى) ∋ ρ_1 .

ملاحظة :

نسمي علاقة الترتيب ρ_1 المعرفة في التمرين السابق **علاقة الترتيب المستنتجة** من العلاقة ρ في المجموعة الجزئية ف .

٢١٤ – إذا كانت ρ علاقة ترتيب معرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية ، ط ، بخاصة « يقسم » فالمطلوب :

١ – وضع الرمز المناسب < أو > بين أزواج الأعداد التالية :

٣ ... ٥ ، ٦ ... ٣ ، ١٧ ... ٣٥ ، ٤ ... ١٦ .

٢ً – بيان فيما إذا كانت علاقات الترتيب المستنتجة في المجموعات الجزئية التالية ، علاقات ترتيب كلي أم جزئي :

أ – مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية .

ب – مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية .

حـ – المجموعة {٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦} .

الحل :

١ً – إن ٣ و ٥ عددان غير متقارنين وفق ر إذن ٣ ⊁ ٥ و ٣ ⊀ ٥ وأن ٦ قابلة القسمة على ٣ أي ٦ يلي ٣ ومنه ٦ > ٣ ولكن ١٧ و ٣٥ غير متقارنين وفق ر إذن ١٧ ⊁ ٣٥ و ١٧ ⊀ ٣٥ أما ٤ فهي تقسم ١٦ أي ٤ يسبق ١٦ ومنه ٤ < ١٦ .

٢ً – إذا نظرنا في مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية فاننا نجد عناصر فيها مثل ٣ و ٥ غير متقارنين وفق ر. إذن فالعلاقة المستنتجة علاقة ترتيب جزئي . كذلك لو نظرنا في مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية فاننا نجد عناصر فيها مثل ٤ و ٦ غير متقارنين وفق ر وبالتالي فالعلاقة المستنتجة علاقة ترتيب جزئي .

أما علاقة الترتيب المستنتجة في المجموعة {٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦} فهي علاقة ترتيب كلي لأن ٢ < ٤ < ٨ < ١٦ .

٢١٥ – لتكن المجموعتان س و ع مرتبتين وفق العلاقة « ≦ » . نعرف علاقة ر على المجموعة س × ع من الشكل :

$$(س_1 ، ع_1)\ ر\ (س_2 ، ع_2) \Leftrightarrow (س_1 \leqslant س_2 \wedge ع_1 \leqslant ع_2)$$

برهن أن هذه العلاقة علاقة ترتيب .

الحل :

إن العلاقة ر علاقة ترتيب لأنها :

١ً – منعكسة لأن :

$$(\text{س} ، \text{ع})\ \text{ر}\ (\text{س} ، \text{ع}) \Leftrightarrow (\text{س} \geqq \text{س} \wedge \text{ع} \geqq \text{ع})$$

٢ً – لامتناظرة لأن :

$$(\text{س}_1 ، \text{ع}_1)\ \text{ر}\ (\text{س}_2 ، \text{ع}_2) \Leftrightarrow (\text{س}_1 \geqq \text{س}_2 \wedge \text{ع}_1 \geqq \text{ع}_2)$$

و $(\text{س}_2 ، \text{ع}_2)\ \text{ر}\ (\text{س}_1 ، \text{ع}_1) \Leftrightarrow (\text{س}_2 \geqq \text{س}_1 \wedge \text{ع}_2 \geqq \text{ع}_1)$

ومن الواضح أن المتراجحات الأخيرة تؤدي الى :

$\text{س}_1 = \text{س}_2$ و $\text{ع}_1 = \text{ع}_2$ ومنه : $(\text{س}_1 ، \text{ع}_1) = (\text{س}_2 ، \text{ع}_2)$

٣ً – متعدية لأن :

$$(\text{س}_1 ، \text{ع}_1)\ \text{ر}\ (\text{س}_2 ، \text{ع}_2) \Leftrightarrow (\text{س}_1 \geqq \text{س}_2 \wedge \text{ع}_1 \geqq \text{ع}_2)$$

و $(\text{س}_2 ، \text{ع}_2)\ \text{ر}\ (\text{س}_3 ، \text{ع}_3) \Leftrightarrow (\text{س}_2 \geqq \text{س}_3 \wedge \text{و ع}_2 \geqq \text{ع}_3)$

وأن المتراجحات الأخيرة تؤدي إلى :

$(\text{س}_1 \geqq \text{س}_3 \wedge \text{ع}_1 \geqq \text{ع}_3)$ ومنه : $(\text{س}_1 ، \text{ع}_1)\ \text{ر}\ (\text{س}_3 ، \text{ع}_3)$

٢١٦ – إن الشكل (١٢٠) هو التمثيل السهمي لعلاقة معرفة في مجموعة النقاط $\{\text{ب}_1 ، \text{ب}_2 ، \text{ب}_3 ، \text{ب}_4 ، \text{ب}_5 ، \text{ب}_6\}$. برهن أن هذه العلاقة علاقة ترتيب .

الحل :

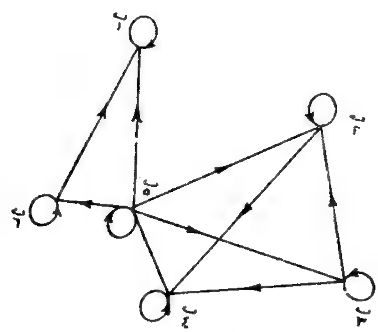
تتصف هذه العلاقة بالخواص التالية :

١ – منعكسة وذلك لأن كل نقطة من نقاط المجموعة تقع في عقدة تشير إلى أن هذه النقطة مرتبطة مع نفسها .

٢ – لاتناظرية لأنه لا يوجد أي زوج من هذه النقاط مرتبط بسهمين من اتجاهين مختلفين .

٣ – متعدية لأن الشكل مؤلف من مجموعة مثلثات من الشكل $ب_{٢}$ $ب_{٣}$ $ب_{٤}$ تحقق علاقة التعدي :

$ب_{٣}$ ر $ب_{٢}$ و $ب_{٢}$ ر $ب_{٤}$ ⇐ $ب_{٣}$ ر $ب_{٤}$



الشكل (١٢٠)

تمارين غير محلولة

٢١٧ – لتكن سـ مجموعة مثلثات المستوي ولتكن ر علاقة معرفة في سـ بخاصة « التشابه » .
برهن أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ .

٢١٨ – لتكن سـ مجموعة مستقيمات المستوي . لتكن ر علاقة معرفة في سـ بخاصة « التعامد » .
هل العلاقة ر علاقة تكافؤ ؟

٢١٩ – لتكن ط مجموعة الأعداد الطبيعية . لتكن ر علاقة معرفة في المجموعة ط × ط بالشكل التالي :

$$(أ،ب) \ ر \ (حـ،د) \Leftrightarrow أ + د = ب + حـ$$

حيث (أ،ب) و (حـ،د) $\in$ ط × ط .

١) برهن أن ر علاقة تكافؤ .

٢) أوجد أصناف تكافؤ العناصر (١،٢) ، (١،٣) ، (٣،٥)

٢٢٠ – لتكن ر علاقة معرفة في مجموعة ما . برهن صحة ما يلي :
ر علاقة تكافؤ $\Leftarrow$ ر $\cap$ ر$^{-1}$ علاقة تكافؤ .

٢٢١ – لتكن ط مجموعة الأعداد الطبيعية . ولتكن ر علاقة معرفة في ط بالشكل س ر ع $\Leftrightarrow$ س | ع حيث س ، ع $\in$ ط .

١) بيّن خواص العلاقة ر وأوجد العلاقة العكسية ر$^{-1}$.

٢) برهن أن العلاقة ر $\cup$ ر$^{-1}$ علاقة تكافؤ .

٢٢٢ – لتكن المجموعة س = { ا ، ب ، ح ، ء ، ه ، ل ، ك } .
بيّن فيما إذا كانت المجموعات الجزئية التالية تشكل تجزئة المجموعة س :

١) { { ا ، ح ، ل } ، { ب } ، { ء ، ك } }
٢) { { ا ، ه ، ك } ، { ح ، ء } ، { ب ، ء ، ل } }
٣) { { ا ، ب ، ه ، ك } ، { ح } ، { ء ، ل } }

٢٢٣ – لتكن المجموعتان س و ع . بيّن فيما إذا كانت المجموعات الجزئية التالية تشكل تجزئة للمجموعة س $\cup$ ع :

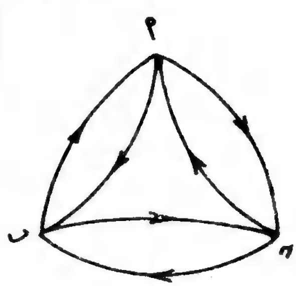
١) { س $\cap$ ع ، س $-$ ع ، ع $-$ س }
٢) { س $\cap$ ع ، س $-$ ع ، س Δ ع }
٣) { س $\cap$ ع ، س Δ ع } .

٢٢٤ – نعرف في ح ، مجموعة الأعداد الحقيقية ، العلاقة :

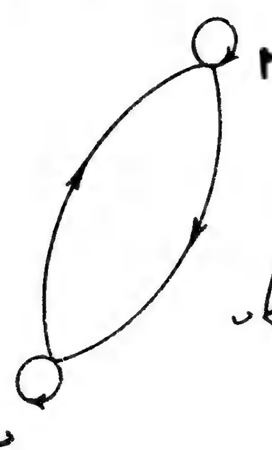
س ر ع $\Leftrightarrow$ س^{3} $-$ ع^{3} $=$ س $-$ ع

قرر فيما إذا كانت هذه العلاقة علاقة تكافؤ وإذا كان الأمر كذلك فما هي أصناف التكافؤ ؟

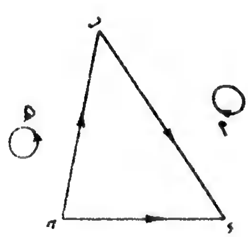
٢٢٥ – عيّن علاقات التكافؤ من بين العلاقات المعرفة بالأشكال التالية :



الشكل (١٢١)



الشكل (١٢٢)



الشكل (١٢٣)

٢٢٦ – ادرس العلاقات التالية المعرفة في مجموعة نقاط المستوي . عيّن أصناف التكافؤ عندما تكون العلاقة المذكورة علاقة تكافؤ .

١ً – ب ، حـ على بعد واحد من نقطة ثابتة م .

٢ً – ب ، حـ يقعان في نصف مستوٍ واحد محدود بمستقيم معين ل.

٣ً – ب ، حـ لا يقعان في نصف واحد من نصفي المستوي اللذين يفصل بينهما مستقيم معين ل .

٢٢٧ – نعرف في ص ، مجموعة الأعداد الصحيحة ، العلاقتين :

(س،ع) ∋ ر ⟸ س – ع مضاعف لـ ٢ و ٣

(س،ع) ∋ ر' ⟸ س – ع مضاعف لـ ٢ أو ٣

هل العلاقة ر علاقة تكافؤ ؟ وإذا كان ذلك ما هي أصناف التكافؤ ؟
هل العلاقة ر' علاقة تكافو ؟

٢٢٨ – لتكن المجموعة س = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠ }
لتكن ر علاقة ترتيب معرفة في س بخاصة « يقسم » .

١) ضع الرمز المناسب بين أزواج الاعداد التالية :
٣ ... ١ ، ٤ ... ٨ ، ٩ ... ٣ ، ٧ ... ٩ ، ٨ ... ٢

٢) اكتب جميع المجموعات الجزئية في س والمرتبة ترتيباً كلياً وفق العلاقة المستنتجة من العلاقة ر .

٢٢٩ – هل يمكن لعلاقة ر على مجموعة س ، أن تكون علاقة ترتيب وتكافو في وقت معاً ؟

٢٣٠ – لتكن ر علاقة معرفة في المجموعة س . برهن صحة ما يلي:

١) ر علاقة ترتيب ⟸ ر ∪ ر$^{-١}$ علاقة ترتيب في س .

٢) ر علاقة ترتيب ⟺ ر علاقة ترتيب في كل مجموعة جزئية في س.

٢٣١ – لتكن المجموعتان س و ع المرتبتان وفق العلاقتين ر_1 و ر_2 على الترتيب . نعرف علاقة ر ، في المجموعة $\text{س} \times \text{ع}$ ، من الشكل :

$$(\text{س}_1 ، \text{ع}_1)\ \text{ر}\ (\text{س}_2 ، \text{ع}_2) \Leftrightarrow (\text{س}_1\ \text{ر}_1\ \text{س}_2 ، \text{ع}_1\ \text{ر}_2\ \text{ع}_2)$$

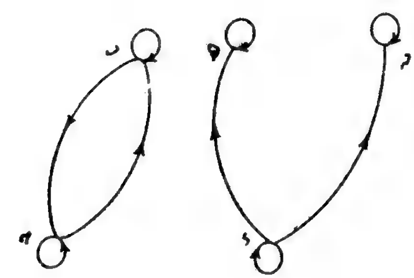
برهن أن ر علاقة ترتيب ثم برهن أنه إذا كانت ر_1 و ر_2 علاقتي ترتيب كلي فان ر علاقة ترتيب كلي .

٢٣٢ – لتكن المجموعتان س و ع مرتبتين وفق العلاقتين ر_1 و ر_2 على الترتيب . نعرف علاقة ر في المجموعة $\text{س} \times \text{ع}$ من الشكل:

$$(\text{س}_1 ، \text{ع}_1)\ \text{ر}\ (\text{س}_2 ، \text{ع}_2) \Leftrightarrow \text{إما}\ \text{س}_1\ \text{ر}_1\ \text{س}_2\ \text{و}\ \text{س}_1 \neq \text{س}_2$$
$$\text{أو}\ \text{س}_1 = \text{س}_2\ \text{و}\ \text{ع}_1\ \text{ر}_2\ \text{ع}_2 .$$

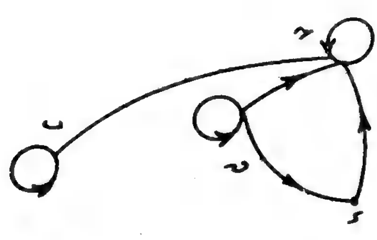
برهن أن هذه العلاقة علاقة ترتيب (الترتيب المعجمي) .

٢٣٣ – أضف الى البيان في الشكل (١٢٤) سهماً واحذف آخر ليصبح بيان علاقة ترتيب .



الشكل (١٢٤)

٢٣٤ – هل العلاقة التي بيانها كما في الشكل (١٢٥) هي علاقة ترتيب؟ برر قولك.



الشكل (١٢٥)

٢٣٥ - نعرف في المجموعة : {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢} علاقة بيانها :

ع = {(١،٢)، (٣،٢)، ([illegible]،٤)، (٤،٤)، (٥،٦)، (٦،٧)، (٦،٦)، (٨،٩)، (١٠،٩)، (١١،٩)، (١١،١٢)} .

مثل هذا البيان ديكارتياً وسهمياً واتممه ليصبح بيان علاقة ترتيب جزئي.

أجوبة وإرشادات

٢١٨ - كلا .

٢٢١ - ر علاقة ترتيب .

٢٢٢ - ٣) تجزئة .

٢٢٣ - ١) و ٣) تجزئة .

٢٢٤ - علاقة تكافؤ .

٢٢٥ - شكل (١٢٢) علاقة تكافؤ .

٢٢٦ - ١) و ٢) علاقتا تكافؤ .

٢٢٧ - ر علاقة تكافؤ .

٢٢٨ - ١) ٣ > ١ ، ٤ > ٨ ، ٩ > ٣ ، ٨ > ٢ .

٢) {١، ٢، ٤، ٨} ، {١، ٢، ٦} ، {١، ٣، ٦}

{١، ٣، ٩} ، {١، ٥، ١٠} .

٢٢٩ - نعم إذا كانت العلاقة ر متناظرة ولامتناظرة في نفس الوقت.

٢٣٤ - ليست علاقة ترتيب لان ى $\overline{ر}$ ى .

الفصل السابع

التوابع ـ التطبيقات

درسنا في الفصل الخامس العلاقات بين عناصر مجموعتين متباينتين أو متساويتين ، وسندرس في هذا الفصل نوعاً خاصاً من العلاقات هي التوابع ، ويعدُّ مفهوم التابع من المفاهيم التي لها تطبيقاتها العديدة في الحياة .

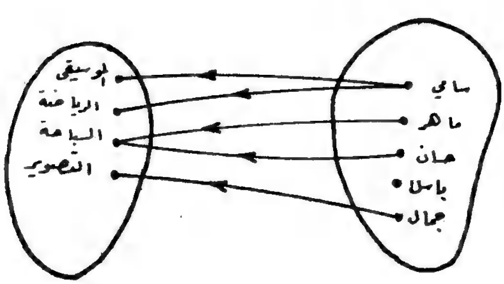
٦٦ – أمثلة توضيحية :

مثال (١) : ليكن : سـ = { سامي ، ماهر ، حسان ، باسل ، جمال }

و ع = { الموسيقى ، الرياضة ، السباحة ، التصوير }

والعلاقة من سـ إلى ع المعرفة بالخاصة (س يمارس ع)

حيث (س ، ع) ∈ سـ × ع والممثلة سهمياً بالشكل (١٢٦) .



ع سـ

الشكل (١٢٦)

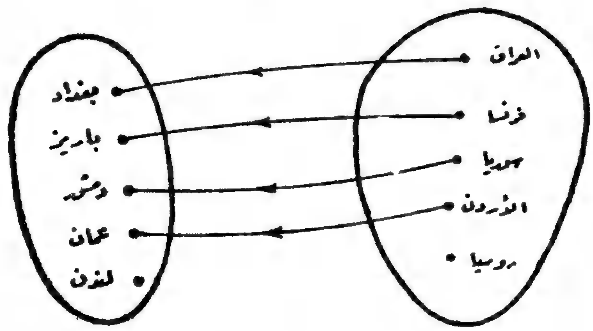
مثال (٢) : لتكن مجموعة الدول

سـ = {العراق ، فرنسا ، سورية ، الأردن ، روسيا}

ومجموعة المدن ع = {باريز ، بغداد ، دمشق ، عمان ، لندن}

والعلاقة من سـ إلى ع المعرفة بالخاصة (س عاصمتها ع)

حيث (س ، ع) ∈ سـ × ع والممثلة سهمياً بالشكل (١٢٧) :



ع الشكل (١٢٧) سـ

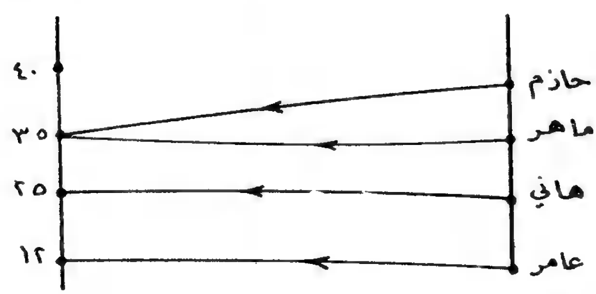
مثال (٣) : لتكن مجموعة الأشخاص

سـ = {عامر ، هاني ، ماهر ، حازم}

ومجموعة الأعمار ع = {٣٥ ، ١٢ ، ٤٠ ، ٢٥}

والعلاقة من سـ إلى ع المعرفة بالخاصة (س عمره ع)

حيث (س ، ع) ∈ سـ × ع والممثلة سهمياً بالشكل (١٢٨) :



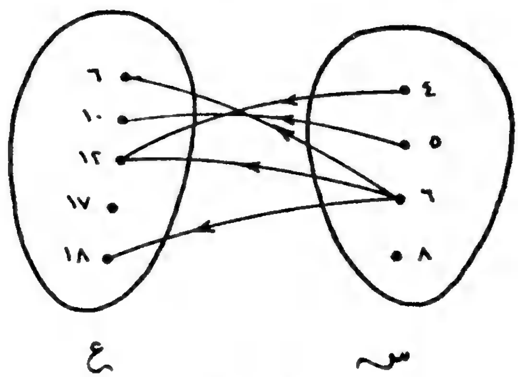
ع الشكل (١٢٨) سـ

مثال (٤) : لتكن مجموعة الأعداد سـ = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨}

ع = {٦ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٧ ، ١٨}

والعلاقة من سـ إلى ع المعرفة بالخاصة (س يقسم ع)

حيث (س، ع) ∈ سـ × ع والممثلة سهمياً بالشكل (١٢٩) :



الشكل (١٢٩)

٦٧ – مفهوم التابع :

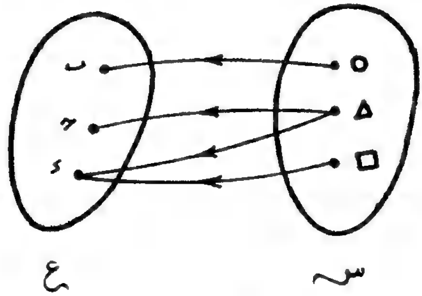
بتدقيق المخططات السهمية الأربعة السابقة نرى في المثالين (١، ٤) أن بعض العناصر من سـ ينطلق منها سهم واحد فقط ، والبعض الآخر ينطلق منها أكثر من سهم ، بينما نرى في المثالين (٢ ، ٣) أنه ينطلق من كل عنصر من سـ سهم واحد على الأكثر (أي صفر من الاسهم أو سهم واحد فقط) .

تسمى العلاقتان في المثالين ٢ ، ٣ ومثيلاتها **علاقات تابعية** أو توابع .

ومنه :

> **التابع** : نقول عن علاقة ثنائية من سـ إلى ع إنها تابع Function . Fonction إذا كان لكل عنصر من سـ مقابل واحد على الاكثر من ع .

مثال (٥) : العلاقة التي يبينها الشكل (١٣٠) ليست تابعاً لأن العنصر △ له مقابلان هما حـ ، ى .



الشكل (١٣٠)

مثال (٦) : العلاقة التي بيانها {(٣،٦) ، (٣،٩) ، (٢،٤) ، (٥،١٠)} ليست تابعاً لأن العنصر ٣ من منطلقها له مقابلان هما ٦،٩ من المستقر .

مثال (٧) : لتكن المجموعة سـ = {−٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} .
والعلاقة في سـ المعرفة بالخاصة س يليه العدد ع مباشرة حيث (س ، ع) ∈ سـ × سـ

إن بيان هذه العلاقه هو :
ى = {(−٢ ، −١) ، (−١ ، ٠) ، (٠ ،١) ، (١ ،٢) ، (٢ ،٣)}

ونلاحظ أن كل عنصر من سـ له مقابل واحد على الأكثر من سـ وفق العلاقة المفروضة . (فالعنصر ٣ ليس له مقابل ولكل من بقية العناصر مقابل واحد فقط) فالعلاقة المفروضة هي تابع .

٦٨ – تعاريف واصطلاحات :

١ – إذا كانت لدينا علاقة تابعية ر منطلقها سـ ومستقرها ع فإننا نستعمل الرمز تا (بدلاً من ر) ونكتب :

تا : سـ ← عـ   أو   سـ ←(تا) عـ

ونقرأ : (تا تابع منطلقة سـ ومستقره عـ) ، أو (تا تابع من سـ إلى عـ) .

٢ – العنصر الوحيد ع من المستقر الذي يرتبط بالعنصر س من المنطلق وفق التابع **تا** يسمى **صورة** س وفق تا أو **قيمة التابع** الموافقة للعنصر س من المنطلق .

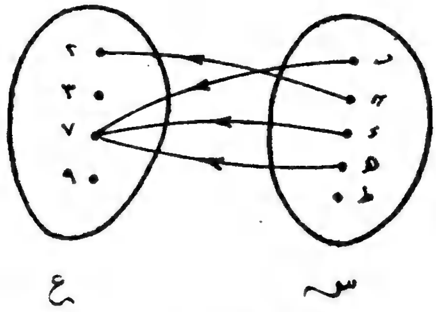
ويرمز له بالزمز تا (س) ويكون تا (س) = ع

٣ – يقال عن تابع إنه معرف من أجل عنصر من المنطلق إذا ارتبط بهذا العنصر عنصر من المستقر وفق هذا التابع ومجموعة عناصر المنطلق التي يرتبط كل منها بمقابل وحيد من مجموعة المستقر تسمى **مجموعة تعريف التابع** (قاعدة التابع) وعلى هذا فمجموعة تعريف التابع في المثال (٧) هي { – ٢ ، – ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } لأن التابع غير معرف من أجل العنصر ٣ .

ومجموعة تعريف التابع في المثال (٢) هي { العراق ، فرنسا ، سورية ، الأردن } والتابع غير معرف من أجل العنصر (روسيا).

مثال : العلاقة من المجموعة : سـ = { ب ، حـ ، ء ، هـ ، ط }
إلى المجموعة : عـ = { ٢ ، ٣ ، ٧ ، ٩ }
التي يمثلها الشكل (١٣١) هي تابع .

لأن كل عنصر من مجموعة المنطلق سـ يقابله عنصر واحد فقط من مجموعة المستقر عـ .



الشكل (١٣١)

ولذا نكتب : تا : س ← ع ونعني بذلك التابع الذي :

منطلقه س = { ب ، ﺣ ، ء ، ﻫ ، ط } ومستقره ع = { ٢ ، ٣ ، ٧ ، ٩ }

إن صورة ﺣ وفق هذا التابع هي ٢ أي تا (ﺣ) = ٢

وصورة ب هي نفسها صورة كل من العنصرين ء ، ﻫ

فللعناصر الثلاثة ب ، ء ، ﻫ قيمة واحدة وفق التابع المفروض

أي أن : تا (ب) = تا (ء) = تا (ﻫ) = ٧

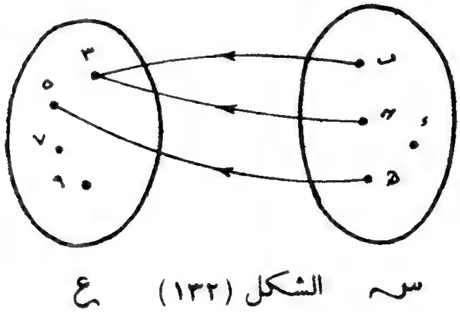
ونلاحظ أن التابع غير معرف من أجل العنصر ط من س

فمجموعة تعريف هذا التابع هي { ب ، ﺣ ، ء ، ﻫ }

٦٩ – طرق تعيين تابع : يمكن تعيين تابع بعدة طرق منها :

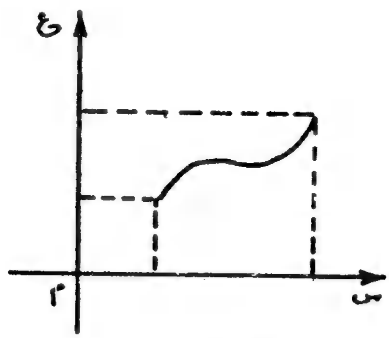
أولاً – بمخطط :

مثال (١) : التابع تا : س ← ع المعين بالتمثيل السهمي في الشكل (١٣٢) .



الشكل (١٣٢)

مثال (٢) : التابع تا : س ← ع المعين بالتمثيل البياني في الشكل (١٣٣)



الشكل (١٣٣)

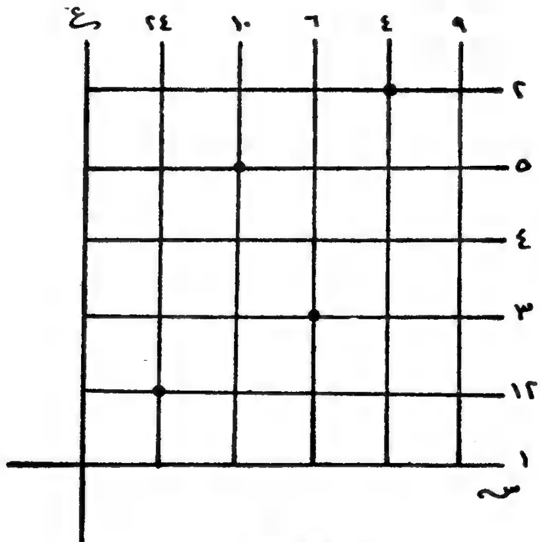
مثال (٣) : التابع تا : س ← ع المبين بالجدول الآتي :

س	م	ب	حـ	ء
ع	١	٣	٣	٥

مثال (٤) : التابع تا : س ← ع المعين بالجدول الآتي :

س/ع	٣٠ درجة	٧٠ درجة	٩٠ درجة	١٥ درجة
حسان		×		
غازي			×	
رامي	×			

مثال (٥) : التابع تا : س ← ع المعين في الشكل (١٣٤) .



الشكل (١٣٤)

ثانياً – ببيانه :

مثال : التابع تا : سـ ← ع الذي بيانه :

ق = {(٢،٦) ، (٣،٩) ، (٧،٢١)}

وواضح أنّ : تا (٢) = ٦ ، تا (٣) = ٩ ، تا (٧) = ٢١

ثالثاً – بقاعدة ربط أو أكثر :

مثال (١) : التابع تا : سـ ← ع من سـ = {٢ ، ٤ ، ٥}
إلى ع = {١، ٣، ٥، ٦، ٧} وفق قاعدة الربط ع = س + ١
حيث (س ، ع) ∈ سـ × ع ويكتب التابع في هذه الحالة بالشكل :

تا : سـ ← ع

س ← س + ١

أو بالشكل : تا : سـ ← ع : س ← س + ١

مثال (٢) : التابع تا : ع ← ع : س ← $\frac{س - ١}{س + ١}$

حيث ع مجموعة الأعداد العادية .

وواضح أن هذا التابع معرف من أجل جميع قيم س عدا القيم التي تعدم المخرج أي إذا كان س + ١ ≠ ٠ إن مجموعة تعريف هذا التابع هي ع - {- ١} ويكون لدينا مثلاً :

تا (٠) = - ١ ، تا (+ ١) = ٠ ، تا (٣) = $\frac{١}{٢}$ ، . . . .

مثال (٣) : ليكن التابع تا : ح ← ح (حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية) والمعرف وفق قاعدتي التقابل الآتيتين :

س ← - س إذا كان س < ٠

س ← س إذا كان س ≥ ٠

أي أن : تا (- ٥) = ٥ ، تا (-٣) = ٣ ، تا (- ١) = ١

تا (٥) = ٥ ، تا (٧) = ٧ ، تا (٢٠) =٢٠،...

ونعبر عن هذا التابع بالشكل الآتي :

تا : ح ← ح : { س ← - س إذا كان س < ٠ ؛ س ← س إذا كان س ≥ ٠ .

ملاحظة :

نرى مما تقدم أن التابع يتعين تماماً بمعرفة :

١ - مجموعة المنطلق : وهي المجموعة التي يأخذ المتحول قيمه فيها .

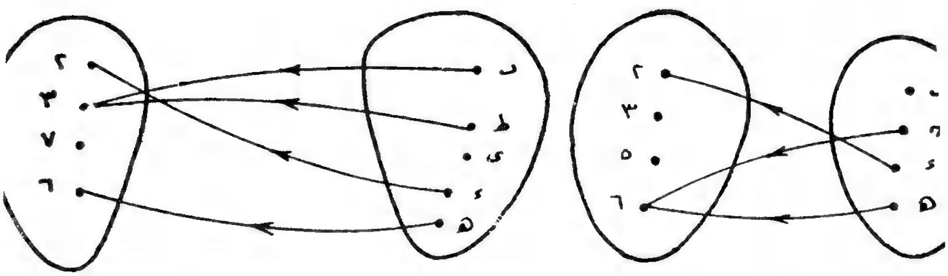
٢ - مجموعة المستقر : وهي المجموعة التي يأخذ التابع قيمه فيها .

٣ - القاعدة أو القواعد التي يتم وفقها التقابل بين عناصر المنطلق والمستقر .

٧٠ – انطباق تابعين « Coïncidence، Coincidence » :

إذا كان لدينا تابعان تا$_{١}$: سـ$_{١}$ ← ع$_{١}$ ، تا$_{٢}$: سـ$_{٢}$ ← ع$_{٢}$
ووجدت مجموعة صـ بحيث صـ ⊃ سـ$_{١}$ ، صـ ⊃ سـ$_{٢}$
وإذا اتفق أنه من أجل كل عنصر س ∋ صـ يكون تا$_{١}$ (س) = تا$_{٢}$ (س)
فإننا نقول إن التابعين تا$_{١}$ ، تا$_{٢}$ منطبقان في المجموعة صـ .

مثال : بملاحظة التابعين الممثلين في الشكل (١٣٥) :



تا$_{٢}$: سـ$_{٢}$ ← ع$_{٢}$ تا$_{١}$: سـ$_{١}$ ← ع$_{١}$

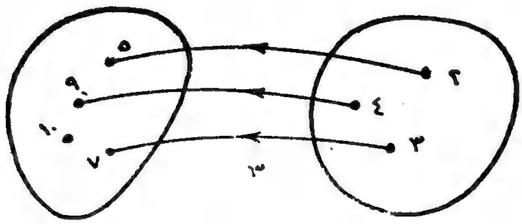
الشكل (١٣٥)

نرى أن المجموعة الجزئية { ى ، هـ } ⊃ سـ$_{١}$ و { ى،هـ } ⊃ سـ$_{٢}$
ونلاحظ أنه : ∀ س ∋ { ى،هـ } يكون تا$_{١}$ (س) = تا$_{٢}$ (س)
لأنّ : تا$_{١}$ (ى) = ٢ = تا$_{٢}$ (ى) و تا$_{١}$ (هـ) = ٦ = تا$_{٢}$ (هـ)
فالتابعان تا$_{١}$ ، تا$_{٢}$ منطبقان في المجموعة { ى،هـ } .

٧١ – تساوي تابعين :

نقول عن تابعين تا$_{١}$ ، تا$_{٢}$ إنهما **متساويان** ونكتب تا$_{١}$ = تا$_{٢}$ إذا كانت مجموعة تعريف الأول هي نفسها مجموعة تعريف الثاني ، وكان تا$_{١}$ (س) = تا$_{٢}$ (س) ∀ س من مجموعة تعريفهما المشتركة .

مثال (٢) : ليكن التابع تا$_{1}$ الذي يمثله الشكل (١٣٦) .



الشكل (١٣٦)

والتابع تا$_{2}$: سـ ← ح : س ← ٢ س + ١
حيث سـ = {٢ ، ٣ ، ٤}

إن هذين التابعين متساويان أي تا$_{1}$ = تا$_{2}$ لتساوي مجموعتي تعريفهما من جهة ولأنه من أجل أي عنصر من مجموعة التعريف تكون صورة تا$_{1}$ هي صورة تا$_{2}$ نفسها .

مثال (٢) : التابعان تا$_{1}$: ح$^{+}$ ← ح : س ← س^{2}
تا$_{2}$: ط ← ح : س ← س^{2}

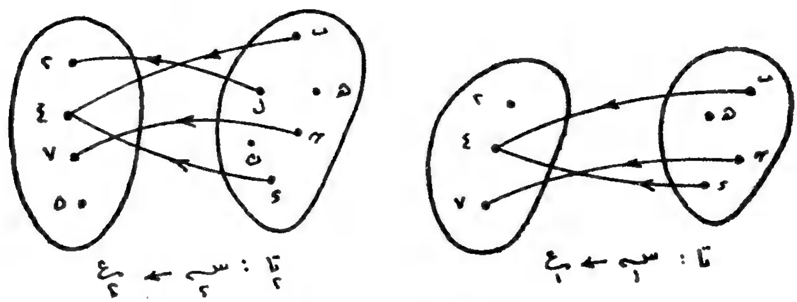
مجموعة تعريف الأول هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ح$^{+}$
ومجموعة تعريف الثاني هي مجموعة الأعداد الطبيعية ط

وهما مجموعتان مختلفتان فالتابعان المفروضان غير متساويين أي تا$_{1}$ $\neq$ تا$_{2}$ لاختلاف مجموعتي تعريفهما رغم أن قاعدتي التقابل فيهما واحدة .

٧٢ – مدد تابع «Prolongement ، Extension»:

ليكن التابعان تا$_{1}$: سـ$_{1}$ ← ع$_{1}$ ، تا$_{2}$: سـ$_{2}$ ← ع$_{2}$
ولنفرض أنهما منطبقان في سـ$_{1}$ فتكون سـ$_{1}$ $\subseteq$ سـ$_{2}$
وإذا كانت ع$_{1}$ $\subseteq$ ع$_{2}$ أيضاً يقال إن التابع تا$_{2}$ يمدد التابع تا$_{1}$ على سـ$_{2}$ أو إن تا$_{2}$ يمدد تا$_{1}$ على سـ$_{2}$.

مثال (١) : في الشكل (١٣٧) التابع تا٢ بمدد التابع تا (لماذا ؟)



الشكل (١٣٧)

مثال (٢) : لقد وجدنا أن التابعين الواردين في الشكل (١٣٥) منطبقان في المجموعـة { ء ، هـ } ، ولكن ليس أي منهـما ممـدداً للآخر لأسباب عدة :

فهما ليسا منطبقين في مجموعة تعريف أحدهما وليكن تا١

ومجموعة تعريف تا١ ليست محتواة في مجموعة تعريف تا٢

كما أن مجموعة المستقر للتابع تا١ ليست محتواة في مجموعة مستقر تا٢

٧٣ – مقصور تابع Restriction :

إذا كان لدينا تابعان تا : س ← ع ، تا٢ : ص ← ع حيث ص ⊆ س . وكانا منطبقين في ص سُمي التـابع تا٢ مقصور التابع تا١ في ص .

مثال : التابع تا١ في المثال (١) من الفقرة السابقة هو مقصور التابع تا٢ في { ب ، حـ ، ء } .

ملاحظة :

واضح أن للتابع الواحد ممددات عديدة على مجموعة مفروضة .

مثال : التابع تا : ح+ ← ح+ : س ← س شكل (١٣٨)

يقبل تابعاً ممدداً له التابع تا : ح ← ح : س ← س شكل (١٣٩)

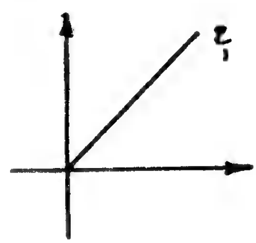
والتابع تا : ح ← ح : س ← | س | شكل (١٤٠)

كما يقبل ممدداً له كلاً من التابعين المعرفين كما يلي :

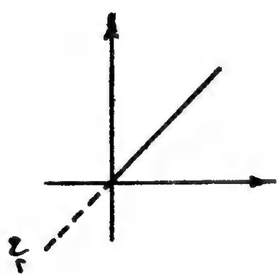
تا : ح ← ح { س ← س إذا كان س ∋ ح+
س ← تركيب جبري ما إذا كان س ∋ ح− − {٠}

تا: ح ← ح { س ← س إذا كان س ∋ ح+
س ← − س + ١ إذا كان س ∋ ح− − {٠}

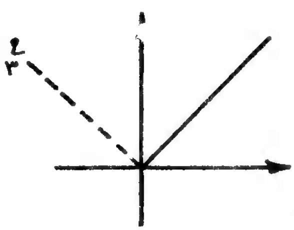
كما في الشكل (١٤١) ، ولو مثلنا التوابع الأربعة في شكل واحد لحصلنا على الشكل (١٤٢) .



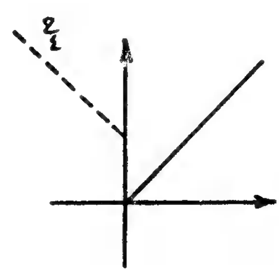
الشكل (١٣٨)



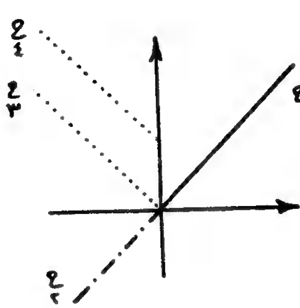
الشكل (١٣٩)



الشكل (١٤٠)



الشكل (١٤١)



الشكل (١٤٢)

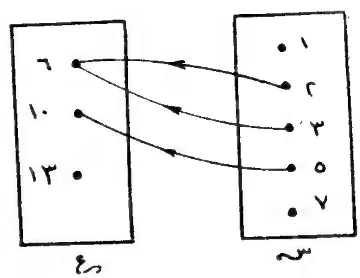
ونلاحظ أن هذه التوابع منطبقة في المجال] ٠ ، + ∞ [

وأن $ح_{١}$ هو مقصور كل من $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$ في هذا المجال .

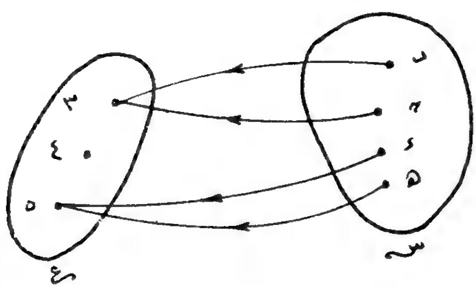
وأن كلا من $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$ هو ممدد للتابع $ح_{١}$ على مجموعة الأعداد الحقيقية ح .

٧١ – التطبيق Mapping ، Application :

مثال : الشكلان (١٤٣ ، ١٤٤) يمثل كل منهما تابعاً ولكننا نلاحظ في التابع المُمثل سهمياً بالشكل (١٤٣) أنه توجد عناصر من منطلقه لا يرتبط بها أي عنصر من المستقر كالعنصر ٧ مثلاً بينما نرى في التابع الممثل سهمياً بالشكل (١٤٤) أنه يرتبط **بكل** عنصر من مجموعة منطلقة عنصر من مجموعة مستقرة .



الشكل (١٤٣)



الشكل (١٤٤)

فللتمييز بين النوعين نسمي كل تابع من النوع الثاني تطبيقاً ، وه :

> **تعريف** : إذا كانت مجموعة تعريف تابع هي مجموعة منطلقة نفسها فاننا نسمي هذا التابع **تطبيقاً** أي أن التطبيق علاقة يرتبط **بكل** عنصر من منطلقها عنصر واحد من مستقرها .

وسنستعمل للتطبيق الرمز تا نفسه الذي استعملناه للتابع ، فالتطبيق من المجموعة سـ إلى المجموعة ع يكتب بالشكل تا : سـ ← ع ومن الواضح أن التطبيق يكون معرفاً على جميع عناصر المنطلق سـ في حين أن التابع يكون معرفا على مجموعة جزئية من سـ .

٧٥ – التطبيق المقترن بتابع :

ليكن التابع تا : سـ ← ع المعرّف على المجموعة $سـ_١ ⊆ سـ$

إن هذا التابع يسمح لنا أن نربط بكل عنصر من $سـ_١$ عنصراً واحداً على الأكثر من ع . أي أنه يعين التطبيق $تا_١ : سـ_١ ← ع$ الذي نسميه **التطبيق المقترن** بالتابع تا . ونلاحظ أنه من أجل كل عنصر س من $سـ_١$ يكون للتابع تا وللتطبيق $تا_١$ الصورة نفسها ، ولذا فإن دراسة التوابع يمكن أن ترد إلى دراسة التطبيقات .

مثال : إذا كان لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← $\frac{س + ١}{س - ١}$

حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية فإن مجموعة التعريف لهذا التابع هي ح − {١} .

فالتطبيق المقترن به هو :

$$تا_١ : ح - \{١\} ← ح : س ← \frac{س + ١}{س - ١} .$$

٧٦ – أنواع هامة من التطبيقات :

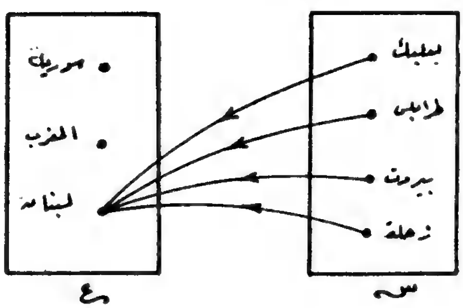
التطبيق الثابت Constant mapping ، Application Constante

مثال (١) : بفرض سـ = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ١٠} و ع = {١٧ ، ٣٠ ، ٤٣}

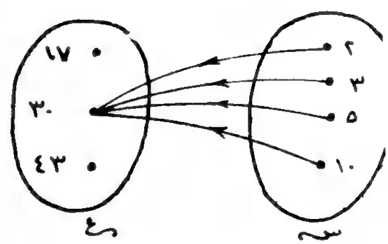
فالعلاقة المعرفة بالشكل (س يقسم ع) حيث س ∋ سـ ، ع∋ ع
تعين التطبيق الممثل في الشكل (١٤٥) ونلاحظ أن لجميع عناصر منطلقه مقابلاً ثابتاً من المستقر هو العنصر ٣٠ لذلك ندعو هذا التطبيق **تطبيقاً ثابتاً** .

مثال (٢) : بفرض سـ = { بعلبك ، طرابلس ، بيروت ، زحلة } ،
ع = { سورية ، المغرب ، لبنان } .

فالعلاقة المعرفة كالآتي (س مدينة في القطر ع) حيث س ∋ سـ ، ع ∋ ع تعين التطبيق الممثل سهمياً في الشكل (١٤٦) ونلاحظ أيضاً أن لجميع عناصر منطلق هذا التطبيق مقابلاً واحداً لا يتغير هو العنصر لبنان من المستقر فهذا التطبيق هو تطبيق ثابت أيضاً ومنه :



الشكل (١٤٦)



الشكل (١٤٥)

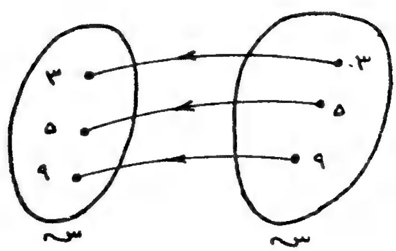
> **تعريف** : نقول عن تطبيق تا : سـ ← ع إنه تطبيق ثابت إذا كان :
>
> (∀ س ∋ سـ) ، تا (س) = ب حيث ب عنصر معين من ع

التطبيق المطابق، Identity mapping ، Application identique :

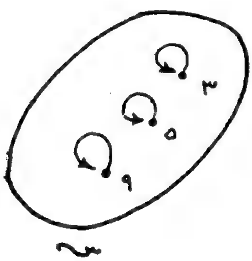
مثال (١) : بفرض سـ = {٣ ، ٥ ، ٩} فالعلاقة س ر س حيث س ∋ سـ تعين التطبيق الممثل سهمياً في الشكلين (١٤٧ ، ١٤٨) ونلاحظ في هذا التطبيق أن :

تا (٣) = ٣ ، تا (٥) = ٥ ، تا (٩) = ٩ اي ان تا (س) = س

نسمي مثل هذا التطبيق **تطبيقاً مطابقاً** ونرمز له بالشكل م سـ أو م ويقرأ التطبيق المطابق في سـ .



الشكل (١٤٧)

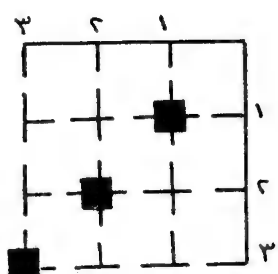


الشكل (١٤٨)

مثال (٢) : الأشكال (١٤٩ ، ١٥٠ ، ١٥١) تمثل تطبيقاً مطابقاً واحداً في {١ ، ٢ ، ٣} :

س	١	٢	٣
تا (س)	١	٢	٣

الشكل (١٤٩)



الشكل (١٥٠)

	١	٢	٣
١	×		
٢		×	
٣			×

الشكل (١٥١)

تعريف : التطبيق من سـ الى سـ الذي نربط وفقه بكل عنصر س من سـ العنصر س نفسه أي تا (س) = س يسمى تطبيقاً مطابقاً في سـ ونرمز له بالشكل م$_{سـ}$ بدلاً من تا ويكون :

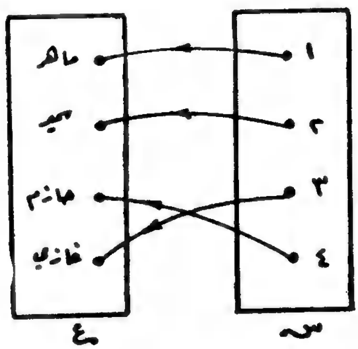
$$(\forall \text{ س} \in \text{سـ}) ، \text{ م}_{\text{سـ}} (\text{س}) = \text{س}$$

أي م : سـ ← سـ : س ← س

المتتالية « Suite ، Sequence » :

مثال (١) : لتكن سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ،
ع = {ماهر ، سمير ، حازم ، غازي}

وليكن التطبيق من سـ إلى ع الممثل سهمياً بالشكل (١٥٢) :



الشكل (١٥٢)

مثال (٢) : إذا تقدم لاحدى المسابقات ٧٩ شخصاً وأعطينا لكل واحد منهم رقماً واحداً معيناً خاصاً بـه من مجموعة الأعداد سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ... ، ٧٩} فإن لكل عنصر من هذه المجموعة مقابلاً واحداً من مجموعة الأشخاص المتسابقين .

مثال (٣) : ليكن التطبيق تا : ط ← ع : س ← س^{٢} + ٣ س + ١
ولنرمز للتطبيق بالرمز ح بدلاً من تا ولنرمز لقيم هذا التطبيق بالرمز ح$_{د}$ أي ح : د ← ح$_{د}$ فيكون :

$ح_١ = ٥$ ، $ح_٢ = ١١$ ، $ح_٣ = ١٩$ ، ... ، $ح_ن = ن^٢ + ٣ن + ١$

بتدقيق كل من هذه التطبيقات الواردة في الأمثلة الثلاثة نلاحظ أن المنطلق في كل منها هو مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منهـا والمستقر هو مجموعة ما. نسمي هذا النوع من التطبيقات متتالية ومنه :

> **تعريف** : المتتالية هي تطبيق منطلقة مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها ومستقره مجموعة ما عددية أو غير عددية .

وسنرمز للمتتالية بالرمز ح بدلاً من تا فنكتب ح : $ط_١ \longrightarrow ع$ حيث $ط_١ \subseteq ط$ كما نكتب $ح_ن$ بدلاً من تا (ن) وتعطى المتتاليـة في أكثر الأحيان بالشكل :

($ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ... ، $ح_ن$ ، ...) ويسمى الحد $ح_ن$ الحد العام للمتتالية أو الحد الذي رتبته ن .

ملاحظة (١) :

إذا كانت $ط_١$ مجموعة منتهية قلنا إن المتتالية منتهية وإلا فهي غير منتهية.

ملاحظة (٢) :

في الحالة الخاصة التي يكون فيها مستقر المتتالية مجموعة عددية نسمي المتتالية عندئذٍ **متتالية عددية** .

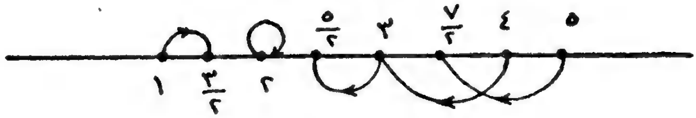
مثال (١) : اكتب المتتالية غير المنتهية التي حدها العام $ح_ن = \frac{ن}{٢} + ١$

ثم مثل الحدود ، $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_٤$ ، $ح_٥$ ، .... من هذه المتتالية على محور .

الحـل :

نبدل ن بالأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ... على الترتيب فنجد :

$ح_{١} = \frac{٣}{٢}$ ، $ح_{٢} = ٢$ ، $ح_{٣} = \frac{٥}{٢}$ ، $ح_{٤} = ٣$ ، $ح_{٥} = \frac{٧}{٢}$ ، ...



الشكل (١٥٣)

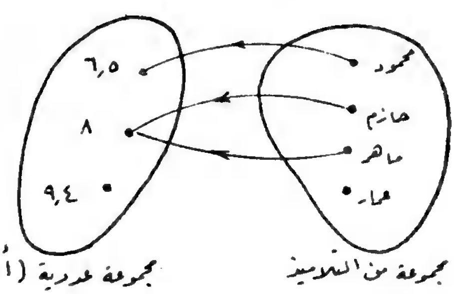
مثال(٢): اكتب الحدود $ح_{١} \ldots ح_{٥}$ من المتتالية التي حدها العام: $ح_{د} = ٢د + ٥$

الحــــل :

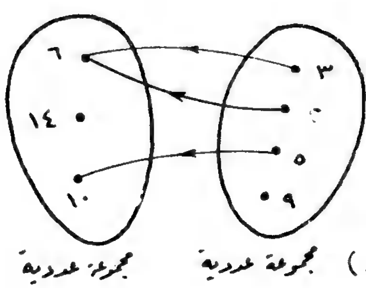
$ح_{١} = ٧$ ، $ح_{٢} = ٩$ ، $ح_{٣} = ١١$ ، $ح_{٤} = ١٣$ ، $ح_{٥} = ١٥$

٧٧–التابع العددي، Fonction numérique . Numerical Function:

إذا نظرنا الى الشكلين (١٥٤ ، ١٥٥) نجد أن كلا منهما يمثل تابعاً ونلاحظ أن المستقر في كل منهما مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ح (أي مجموعة عددية) .



الشكل (١٥٤)



الشكل (١٥٥)

نسمي كلا من هذين التابعين وأمثالهما **تابعاً عددياً** ، ومنه :

تعريف : كل تابع مستقره مجموعة عددية يسمى تابعاً عددياً .

٧٨ – التطبيق العددي

«Applicatian numérique . Numerical mapping »:

بالمثل كل تطبيق مستقره مجموعة عددية يسمى **تطبيقاً عددياً** .

٧٩ – التابع العددي ذو المتحول الحقيقي :

إذا كان منطلق التابع العددي مجموعة عددية حقيقية سمي **تابعاً عددياً لمتحول حقيقي** .

مثال (١) : بفرض سـ مجموعة من الطلاب تقدم بعضهم للامتحان وتغيب البعض الآخر .

فالتابع تا: سـ ← ح: س ← درجته في الامتحان هو تابع عددي.

مثال (٢) : بفرض سـ مجموعة من الأشكال الهندسية المستوية التي لها مساحات ، فإنّ :

التطبيق تا : سـ ← ح: س ← قياس مساحته هو تطبيق عددي.

مثال (٣) : التابع تا : ح ← ح : س ← $\frac{\text{٥ س}}{\text{س} - \text{٣}}$

هو تابع عددي ذو متحول حقيقي .

مثال (٤) : التطبيق تا : [٢، ٣] ← ح : س ← $\frac{\text{س} - \text{١}}{\text{س} + \text{١}}$

هو تطبيق عددي ذو متحول حقيقي س ∋ المجال الحقيقي [٢، ٣]

مثال (٥) : التابع تا : ح ← ح : س ← $\sqrt{(\text{س} - \text{٢})\,(\text{س} - \text{٥})}$

هو تابع عددي ذو متحول حقيقي .

ويكون تا : ح –]٢ ، ٥[← ح : س ← $\sqrt{(\text{س} - \text{٢})\,(\text{س} - \text{٥})}$

هو التطبيق العددي ذي المتحول الحقيقي المقترن بالتابع المفروض.

مثال (٦) : التابع تا : ح ← ح : س ← $\frac{س^2 - 3 س}{س^2 - 4}$ هو تابع عددي ذو متحول حقيقي .

ويكون تا : ح − { − ٢ ، ٢ } ← ح : س ← $\frac{س^2 - 3 س}{س^2 - 4}$

هو التطبيق العددي ذو المتحول الحقيقي المقترن بالتابع المعطى .

مثال (٧) : التابع تا : ح ← ح : { س ← ١ إذا كان س عدداً عادياً ، س ← ٠ إذا كان س عدداً غير عادي }

هو تابع عددي ذو متحول حقيقي .

٨٠ – أنواع التطبيقات بالنسبة إلى مستقرها :

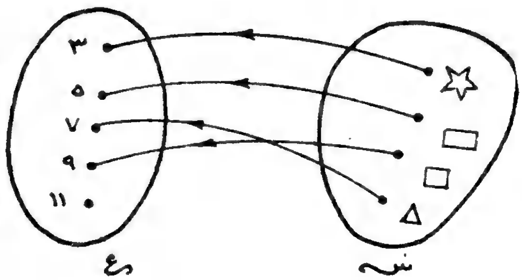
عندما نصنف العلاقات إلى علاقات تابعية وأخرى غير تابعية نحصر اهتمامنا فقط في عناصر المنطلق التي يرتبط بها عناصر من المستقر ونبحث فيما إذا كان لكل عنصر من عناصر المنطلق هذه مقابل وحيد من المستقر.

وعندما نميز من بين العلاقات التابعية تلك التي دعوناها تطبيقات نحصر اهتمامنا في منطلق العلاقة ونبحث فيما إذا كانت ، بجميع عناصر المنطلق، ترتبط عناصر من المستقر .

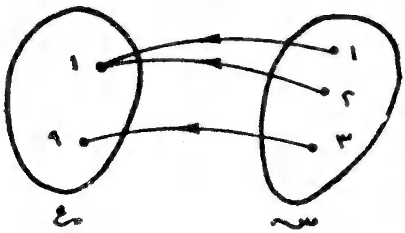
هذا ولو درسنا بالاضافة لذلك شكل ارتباط عناصر المستقر بعناصر المنطلق في التطبيقات فاننا نحصل على الأنواع التالية من التطبيقات :

التطبيق المتباين « Injection . One - One mapping » :

مثال : في التطبيق الممثل سهمياً بالشكل (١٥٦) نلاحظ أن آي عنصر من مستقره هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من منطلقه أي أن العنصرين المتمايزين من المستقر يقابلان عنصرين متمايزين من المنطلق ،



الشكل (١٥٦)



الشكل (١٥٧)

بينما في التطبيق الممثل في الشكل (١٥٧) نجد أن أحد العناصر من مستقره هو صورة لأكثر من عنصر من المنطلق ، لذا نسمي التطبيق من النوع الأول **تطبيقاً متبايناً** ، ومنه :

> **تعريف** : نسمي التطبيق متبايناً إذا كان كل عنصر من مجموعة مستقره هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من مجموعة منطلقه . أي أن كل عنصر من المستقر إما أن يرتبط بعنصر واحد من المنطلق أو لا يرتبط بأي عنصر .

وهذا يعني أنه في التطبيق المتباين إذا كان س ، س′ عنصرين متمايزين من المنطلق فصورتاهما تا (س) ، تا (س′) وفق التطبيق تا متمايزتان أيضاً .

أي أنّ : س $\neq$ س′ $\Leftarrow$ تا (س) $\neq$ تا (س′)

وهذا يكافىء القول تا (س) = تا (س′) $\Leftarrow$ س = س′

مثال (١) : التطبيق تا : ط ← ط : س ← س + ٢

حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية هو تطبيق متباين لأنّ :

س $\neq$ س′ $\Leftarrow$ س + ٢ $\neq$ س′ + ٢ $\Leftarrow$ تا (س) $\neq$ تا (س′)

أو بطريقة ثانية ، لأنّ :

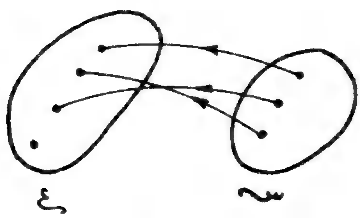
تا (س) = تا (س′) أو س + ٢ = س′ + ٢ ⇐ س = س′

مثال (٢) : التطبيق تا : ح ← ح : س ← جب س بفرض ٠ < س < π

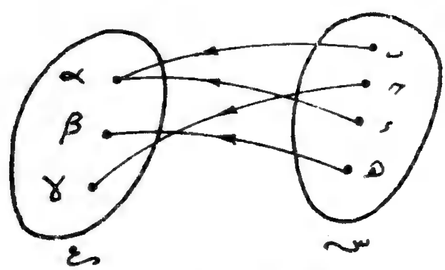
حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية هو تطبيق غير متباين (لماذا؟)

التطبيق الغامر « Surjection , Onto mapping » :

مثال : في التطبيق الممثل سهمياً بالشكل (١٥٨) نلاحظ أن كل عنصر من مجموعة مستقره هو صورة لعنصر على الأقل من مجموعة منطلقه، بينما في التطبيق الممثل سهمياً بالشكل (١٥٩) نجـد أن بعض العناصر من مستقره ليست صوراً لأي عنصر من المنطلق .



الشكل (١٥٩)



الشكل (١٥٨)

لذا نسمي التطبيق من النوع الأول **تطبيقاً غامراً** ، ومنه :

> **تعريف** : نسمي التطبيق غامـراً إذا كان كل عنصر من مجموعـة مستقره هو صورة لعنصر على الأقل من مجموعة منطلقه .

وهذا يعني أنه في التطبيق الغامر من س إلى ع يكون :

∀ ع ∈ ع ، E س ∈ س : ع = تا (س)

ويقال أيضاً إن التطبيق الغامر هو تطبيق من س على ع .

ملاحظة :

التطبيق المتباين في الشكل (١٥٦) ليس غامراً (لماذا ؟)

والتطبيق غير المتباين في الشكل (١٥٧) هو غامر (لماذا ؟)

مثال (١) : التطبيق تا : ط ← ط : س ← ٢ س

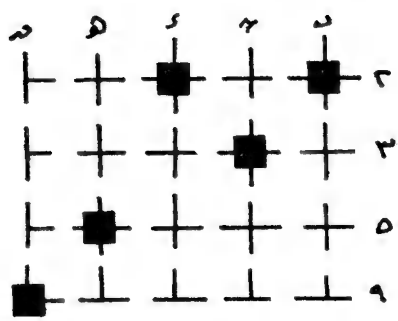
حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية ليس غامراً .

لأنه حتى يكون غامراً يجب أن يكون أي عدد طبيعي من مجموعة المستقر ط هو صورة وفق هذا التطبيق لعنصر على الأقل من مجموعة المنطلق ط .

أي أن يكون للمعادلة ٢ س = ع حل في ط مهما كانت ع ∈ ط .

وهذا غير صحيح لأن المعادلة ٢ س = ٣ مثلاً لا تقبل حلاً في ط أي لا يوجد عدد طبيعي ضعفه يساوي ٣ .

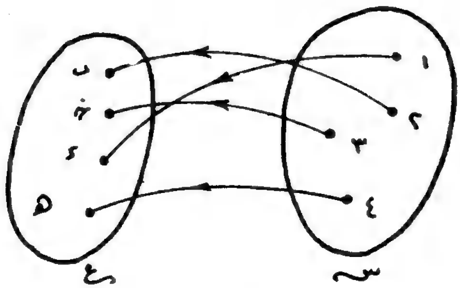
مثال (٢) : العلاقة الممثلة شبكياً في الشكل (١٦٠) حيث المنطلق هو المجموعة { ب ، ح ، ء ، ه ، ن } والمستقر هو المجموعة { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٩ } هو تطبيق غامر (لماذا ؟)



الشكل (١٦٠)

التقابل Bijection , One - one and Onto mapping :

مثال : نلاحظ أن التطبيق الممثل سهمياً بالشكل (١٦١) متباين وغامر في آن واحد .



الشكل (١٦١)

نسمي هذا التطبيق وأمثاله **تقابلاً** ، ومنه :

تعريف : نسمي التطبيق تقابلاً إذا كان متبايناً وغامراً في آن واحد .

وهذا يعني أن التطبيق تا : س ⟵ ع هو تقابل إذا كان :

من أجل كل عنصر ع ∈ ع يوجد عنصر وحيد س من س بحيث ع = تا (س) .

مثال (١) : التطبيق تا : ح ⟵ ح : س ⟵ ٣ س − ١ هو تقابل .

في الحقيقة إنه غامر لأنه من أجل كل ع من ح يكون :

$$٣ س − ١ = ع \Leftarrow س = \frac{١}{٣} (ع + ١)$$

وهو متباين لأنه من أجل كل عنصرين س ، س' من المنطلق يكون :

$$٣ س − ١ = ٣ س' − ١ \Leftarrow س = س'$$

مثال (٢) : التناظر الذي مركزه نقطة ن في مستوٍ والتناظر بالنسبة لمستقيم في هذا المستوي هما تقابلان من المستوي إلى المستوي نفسه.

مثال (٣) : ليكن التطبيق تا : سـ ← ع وليكن د عدد عناصر سـ ، د' عدد عناصر ع حيث سـ و ع مجموعتان منتهيتان ، والمطلوب

١ – قارن بين د ، د' إذا كان تا متبايناً.

٢ – قارن بين د ، د' إذا كان تا غامراً.

٣ – قارن بين د ، د' إذا كان تا تقابلاً.

الحـــل :

إذا كان تا متبايناً فإن د ≤ د'

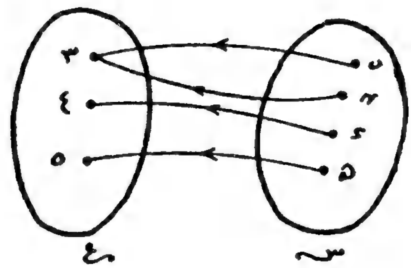
وإذا كان تا غامراً فإن د' ≤ د

وإذا كان تا تقابلاً فإن د = د'

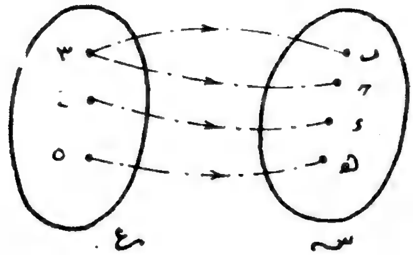
٨١ – العلاقة العكسية للتطبيق :

لتكن التطبيقات الممثلة في الأشكال (١٦٢ ، ١٦٤ ، ١٦٦) ، من الواضح أن العلاقة العكسية لعلاقة التطبيق في الشكل (١٦٢) والممثلة في الشكل (١٦٣) ليست تطبيقاً حتى أنها ليست تابعاً وذلك لأنه ينطلق سهمان من العنصر ٣ .

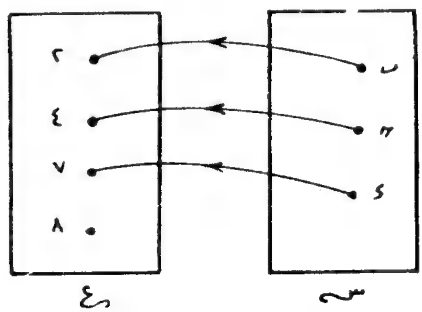
كما أن العلاقة العكسية لعلاقة التطبيق المتباين في الشكل (١٦٤) والممثلة في الشكل (١٦٥) هي تابع وليست تطبيقاً. أما العلاقة العكسية للتقابل من سـ إلى ع في الشكل (١٦٦) والممثلة في الشكل (١٦٧) فهي تقابل من المجموعة ع إلى المجموعة سـ .



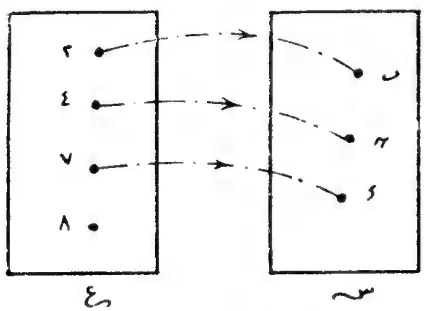
الشكل (١٦٢)



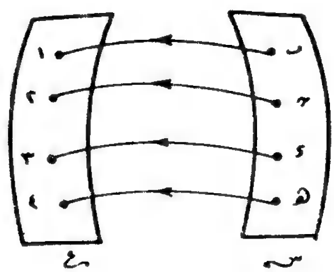
الشكل (١٦٣)



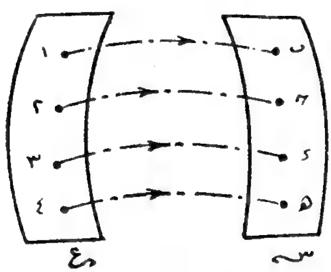
الشكل (١٦٤)



الشكل (١٦٥)



الشكل (١٦٦)



الشكل (١٦٧)

التطبيق العكسي :

مما تقدم نلاحظ أن العلاقة العكسية لتطبيق مفروض لا تكون تطبيقاً إلا عندما يكون التطبيق المفروض تقابلاً وفي هذه الحالة نسمي العلاقة

العكسية للتطبيق المفروض تطبيقاً عكسياً أو تقابلا عكسياً له .

ويبرهن بسهولة أن كل تقابل تا : سـ ← ع له تقابل عكسي ع إلى سـ نرمز له بالرمز تا$^{-1}$ فنكتب تا$^{-1}$: ع ← سـ

مثال (١) : التطبيق تا : ح ← ح : س ← س + ١
هو تقابل ولذا فإن له تقابلاً عكسياً هو :

تا$^{-1}$: ح ← ح : س ← س − ١

مثال (٢) : التطبيق تا : ع ← ع : س ← ٣ س − ٢
هو تقابل ولذا فإن له تقابلا عكسياً هو :

تا$^{-1}$: ع ← ع : س ← $\frac{\text{س} + ٢}{٣}$

مثال (٣) : التطبيق تا : ص ← ص : س ← ٥ س + ١
متباين وغير غامر فليس له تطبيق عكسي .

مثال (٤) : التطبيق تا : ح ← ح : س ← س^{2}
غير متباين لأن تا (−٢) = تا (٢) = ٤ مثلا فليس له تطبيق معاكس.

مثال (٥) : التطبيق تا : ح$^{+}$ ← ح$^{+}$: س ← س^{2}
هو تقابل ولذا فإن له تقابلا عكسياً هو :

تا$^{-1}$: ح$^{+}$ ← ح$^{+}$: س ← $\sqrt{\text{س}}$

مثال (٦) : التطبيق تا : ح* ← ح* : س ← س$^{-1}$ تقابل
ولذا فإن تا$^{-1}$: ح* ← ح* : س ← س$^{-1}$ هو التقابل المعاكس .

٨٢ – تركيب التطبيقات :

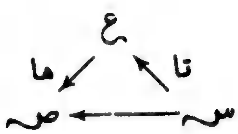
بما أن كل تطبيق هو علاقة فإن تركيب تطبيقين من الشكل :

تا : سـ ← عـ ، ها : عـ ← صـ

يتم بالطريقة ذاتها التي مرت معنا في تركيب العلاقات في الفقرة ٦٠ . ولكننا سنبرهن فيما يلي أن تركيب كل تطبيقين هو تطبيق أي أنه إذا كان تا وها تطبيقين فإن ها ∘ تا تطبيق منطلقه سـ ومستقره صـ .

في الحقيقة إذا كان س عنصراً كيفياً من سـ فإن له صورة وحيدة ع ∈ عـ وفق تا . وبما أن ها تطبيق فإن لـ ع صورة وحيدة ص ∈ صـ وفق ها وبالتالي تكون ص هي الصورة الوحيدة لـ س وفق التركيب ها ∘ تا الأمر الذي يؤكد أن هذا التركيب تطبيق .

يرمز لعملية التركيب كذلك بالشكل :



ها ∘ تا

أو بالشكل : س ← تا (س) ← ها [تا (س)] .

أي أن : (ها ∘ تا) (س) = ها [تا (س)] .

وقد وضعنا ها ∘ تا بين قوسين للدلالة على أن التطبيق الذي ندرسه هو التطبيق المركب ، فلو رمزنا للتطبيق المركب بالرمز كا لكان كا = ها ∘ تا وعندها نكتب كا (س) بدلاً من (ها ∘ تا) (س) .

ملاحظة :

١ً – للبحث عن صورة العنصر س من سـ وفق ها ∘ تا نبحث أولاً

عن صورة س وفق تا ولتكن ع = تا (س) ثم عن صورة ع من ع وفق ها ولتكن ها (ع) .

والمساواة ها (ع) = ها [تا (س)] تبين السبب الذي يجعلنا نكتب ها ∘ تا بدلاً من تا ∘ ها .

٣ – التطبيق ها ∘ تا لا يكون معرفاً إلا إذا كان مستقر التطبيق تا هو منطلق التطبيق ها . ومن أجل التطبيقات من سـ إلى سـ يمكن تعريف كل من ها ∘ تا ، تا ∘ ها .

مثال (١) : لتكن المجموعة سـ = { ب ، حـ ، ى } والتطبيقان تا ، ها من سـ إلى سـ المعرفين كما يلي :

وفق تا : ب ← ب
حـ ← ى
ى ← حـ

وفق ها : ب ← حـ
حـ ← ب
ى ← ى

فإن : ها ∘ تا يكون :

سـ	تا ← سـ	ها ← سـ
ب	← ب	← حـ
حـ	← ى	← ى
ى	← حـ	← ب

أي أن (ها ∘ تا) (ب) = حـ ، (ها ∘ تا) (حـ) = ى ، (ها ∘ تا) (ى) = ب .

مثال (٢) ليكن تا : ط ← ط : س ← س + ٢
ها : ط ← ط : س ← س^{٢} + ١

احسب (ها ∘ تا) (س) ، ثم (تا ∘ ها) (س) وقارن النتيجتين.

الحل :

$$(ها \circ تا) (س) = ها [تا (س)] = ها (س + ٢)$$
$$= (س + ٢)^{٢} + ١$$

ويمكن تلخيص ذلك بالشكل الآتي :

$$ط \xrightarrow{تا} ط \xrightarrow{ها} ط$$

$$س \longrightarrow س + ٢ \longrightarrow (س + ٢)^{٢} + ١$$

لنحسب $(تا \circ ها) س = تا [ها (س)] = تا (س^{٢} + ١)$
$$= (س^{٢} + ١) + ٢ = س^{٢} + ٣$$

ونلاحظ في هذا المثال أن : $ها \circ تا \neq تا \circ ها$

٨٣ – خواص التطبيقات :

خاصة (١) : بفرض التطبيق تا : سـ ← ع ، والتطبيق المطابق $م_{سـ}$

في سـ والتطبيق المطابق $م_{ع}$ في ع فإن :

$$\boxed{تا \circ م_{سـ} = م_{ع} \circ تا = تا}$$

في الحقيقة : $\left.\begin{array}{l} سـ \xrightarrow{م} سـ \xrightarrow{تا} ع \\ س \longrightarrow س \longrightarrow تا (س) \end{array}\right\} \Leftarrow تا \circ م_{سـ} = تا$

$$\left.\begin{array}{l} سـ \xrightarrow{تا} ع \xrightarrow{م} ع \\ س \longrightarrow ع \longrightarrow ع \end{array}\right\} \Leftarrow م_{ع} \circ تا = تا$$

إذن : $تا \circ م_{سـ} = م_{ع} \circ تا = تا$

خاصة (٢) : بفرض تا ، ها ، ما تطبيقات معينة بالشكل الآتي :

سـ ـتا→ ع ـها→ صـ ـما→ ف

فإن : | (ما ∘ ها) ∘ تا = ما ∘ (ها ∘ تا) |

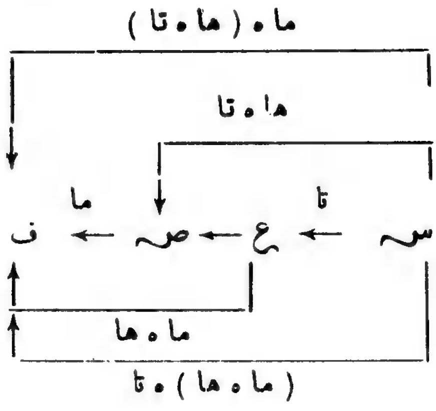
أي أن التركيب الناتج وحيد ولذا يكتب بالشكل ما ∘ ها ∘ تا
وهذا يعني أن تركيب التطبيقات يتمتع بالخاصة التجميعية (خاصة الدمج) .

في الحقيقة : ∀ س ∈ سـ نكتب :

[(ما ∘ ها) ∘ تا] (س) ≡ (ما ∘ ها) [تا (س)] ≡ ما [ها (تا (س))]

[ما ∘ (ها ∘ تا)] (س) ≡ ما [(ها ∘ تا) (س)] ≡ ما [ها (تا (س))]

إذن : (ما ∘ ها) ∘ تا ≡ ما ∘ (ها ∘ تا) . وهو المطلوب .



خاصة (٣) : التطبيق الناتج من تركيب تطبيقين غامرين هو تطبيق غامر ومن تركيب تطبيقين متباينين هو تركيب متباين ، ومن تركيب تقابلين هو تقابل .

باستطاعة القارىء برهان هذه النظرية بسهولة بالاستناد إلى التعاريف.

خاصة (٤) : إذا كان التطبيق تا : سـ $\xrightarrow{1}$ ع تقابلا فإنّ :

$$\text{تا}^{-1} \circ \text{تا} = \text{م}_{\text{سـ}} \quad ، \quad \text{تا} \circ \text{تا}^{-1} = \text{م}_{\text{ع}}$$

في الحقيقة إن بيان التطبيق $\text{تا}^{-1} \circ \text{تا}$ هو مجموعة الثنائيات (س،س) أي $\text{م}_{\text{سـ}}$.

وبيان التطبيق $\text{تا} \circ \text{تا}^{-1}$ هو مجموع الثنائيات (ع، ع) أي $\text{م}_{\text{ع}}$

وبشكل خاص إذا كان التطبيق تا : سـ ← سـ تقابلا فإنّ :

$$\text{تا}^{-1} \circ \text{تا} = \text{تا} \circ \text{تا}^{-1} = \text{م}_{\text{سـ}}$$

* * *

تمارين محلولة

التوابع والتطبيقات :

٢٣٦ – عيّن مجموعة تعريف كل من التوابع الآتية :

١َ – تا : ط ← ط : س ← س + ١

٢َ – ها : ح ← ح : س ← $\sqrt{\text{س} - ١}$

٣َ – لا : ع ← ع : س ← $\frac{\text{س}}{٤\,\text{س}^{٢} - ١}$

٤َ – جا : ع* ← ع : ز ← $\frac{٢\,\text{ز} + ١}{\text{ز}}$

الحل :

١َ – ∀ س ∈ ط (المنطلق) ← س + ١ ∈ ط (المستقر)

اذن تا معرّف على ط بكاملها .

٢َ – بما أن $\sqrt{\text{س} - ١}$ لا ينتمي إلى ح إلا إذا كان س – ١ ≥ ٠

أي س ≥ ١ . اذن التابع ها معرّف من أجل قيم س ∈ ح حيث

س ≥ ١ أي أن مجموعة تعريف ها هي المجال [١ ، ∞ [.

٣َ – يكون $\frac{\text{س}}{٤\,\text{س}^{٢} - ١}$ عدداً عادياً اذا كان ٤ س^{٢} – ١ ≠ ٠

أي إذا كان س $\neq \mp \frac{١}{٢}$ ، وعليه فالتابع معرّف من أجـــل

جميـــع قيم س ∈ ع (المنطلق) عدا س $= \mp \frac{١}{٢}$ وبالتالي فإن

مجموعة تعريف هذا التابع هي المجموعة ع − $\{ \frac{١}{٢} ، - \frac{١}{٢} \}$.

٤ً – بما أن $\frac{٢ ز + ١}{ز}$ ∈ ع ∀ ز ∈ ع* فالتابع حا معرّف ∀ ز ∈ ع*
وبالتالي فإن ع* هي مجموعة تعريف حا .

٢٣٧ – ميّز التطبيقات من بين التوابع التالية :

١ً – تا$_{١}$: ج ← ط* : س ← عدد أشقائه بفرض ج مجموعة الناس.

٢ً – تا$_{٢}$: آ ← ط : س ← عدد أولاده بفرض آ مجموعة الآباء.

٣ً – تا$_{٣}$: [−١ ، +١] ← ع : س ← $\frac{س}{س - ١}$

٤ً – تا$_{٤}$:]−١ ، ١[← ع : س ← $\frac{٥}{س + ١}$

الحـل :

١ً – بما أنه يوجد بعض الأشخاص الذين لا أشقاء لهم ، فـإن كل
شخص من هؤلاء الأشخاص لا يرتبط به أي عنصر من المستقر ط*
ولذا فإن تا$_{١}$ ليس تطبيقاً .

٢ً – إذا لم يكن لبعض الآباء أولاد فكل منهم يرتبط به العدد ٠ ∈ ط ،
أما الأب الذي له أولاد فيرتبط به من ط العنصر الذي يمثـل

عدد أولاده . ولذا فإن كل عنصر من آ يرتبط به عنصر من ط وبالتالي فإن $تا_٢$ تطبيق من آ إلى ط .

٣ً – إن $\frac{س}{س - ١}$ لا معنى له من أجل س = ١ أي أنَّ العنصر ١ من المنطلق لا يرتبط به أي عنصر من ح (المستقر) ولذا فان $تا_٢$ ليس تطبيقاً .

٤ً – إن $\frac{٥}{س + ١}$ ∋ ح من أجل جميع قيم س من المنطلق]–١ ، +١[ولذا فان $تا_٢$ هو تطبيق .

٢٣٨ – لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← $\sqrt{س}$
عيّن التطبيق ها المقترن بالتابع تا .

الحـل :

يكون لعدد س ∋ ح جذر تربيعي اذا كان س ≤ ٠ ولذا فان مجموعة تعريف تا هي المجموعة ح + . والتطبيق المطلوب هو التطبيق :

ها : ح + ← ح : س ← $\sqrt{س}$

٢٣٩ – لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← تا (س)

حيث : تا (س) = { س من أجل س < ٠ ؛ ٠ من أجل ٠ < س ≥ ١ ؛ ١ من أحل س > ١ }

١ً – عيّن مجموعة تعريف تا .

٢ً – أوجد تا (–٣) ، تا ($\frac{١}{٢}$)، تا (١) ، تا (٥) ، تا (١٠٠)

٣ - ارسم المخطط الديكارتي للتابع تا .

الحل :

١ً - إن العدد ٠ ∋ ح (المنطلق) لا يقابله أي عنصر من ح (المستقر) وفق تا . ولذا فان مجموعة تعريف تا هي المجموعة ح*.

٢ً - من أجل كل عدد سالب س ∋ ح (المنطلق) يكون تا (س) = س

ومنه تا (- ٣) = - ٣

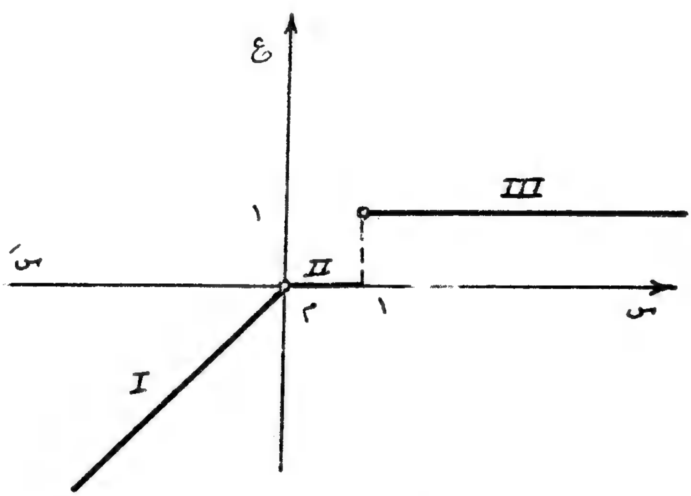
ومن أجل كل عدد ٠ < س ≥ ١ يكون تا (س) = ٠

اذن : تا ($\frac{١}{٢}$) = ٠ ، تا (١) = ٠

واذا كان س > ١ فان تا (س) = ١

اذن : تا (٥) = ١ ، تا (١٠٠) = ١

٣ً - المخطط الديكارتي كما هو مبين في الشكل (١٦٨) :



الشكل (١٦٨)

إن الدويرة على المخطط الديكارتي تشير إلى عدم انتماء النقطة (مركز الدويرة) الى بيان التابع . فالنقطتان (٠،٠) ، (١،٠) لا تنتميان الى بيان التابع السابق .

ومن الواضح أن الجزء I من المخطط هو جزء المستقيم الذي معادلته ع = س الموافق لقيم س السالبة . وأن الجزء II هو جزء المستقيم ع =٠ الموافق لقيم س حيث ٠ < س ≦ ١ ، وأما الجزء III فهو جزء المستقيم ع = ١ الموافق لقيم س > ١ .

٢٤٠ – لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← تا (س)

حيث : تا (س) = { س + ١ لمّا س < −١ ؛ ١ لمّا −١ < س < ١ ؛ −٢س+٤ لمّا ١ ⩽ س

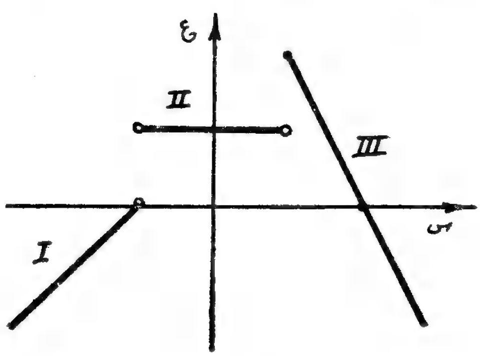
١ً – أوجد مجموعة تعريف تا .

٢ً – ارسم المخطط الديكارتي للتابع تا .

الحل :

١ً – إن العدد −١ ∋ ح (المنطلق) لا يقابله أي عنصر من ح (المستقر) وفق تا ولذا فان مجموعة تعريف تا هي المجموعة ح −{−١}

٢ً – أما المخطط الديكارتي فهو كما في الشكل (١٦٩) :



الشكل (١٦٩)

٢٤١ – لدينا المجموعتان $س = \{١ ، ٣ ، ٥ ، ٧\}$

$ع = \{٢ ، ٤ ، ٦\}$

والعلاقات من س إلى ع التي بياناتها :

$ر_١ = \{(١،٢) ، (٣،٢) ، (٥،٤)\}$

$ر_٢ = \{(٣،٢) ، (٥،٢) ، (٣،٦) ، (٧،٦)\}$

$ر_٣ = \{(١،٢) ، (١،٤) ، (١،٦) ، (٧،٦)\}$

$ر_٤ = \{(١،٢) ، (٣،٢) ، (٥،٤) ، (٧،٦)\}$

أي العلاقات السابقة تابع وأي التوابع منها تطبيق ؟

الحل :

يلاحظ في البيان $ر_١$ أن المركبات الأولى في الأزواج المرتبة مختلفة مثنى مثنى ، أي أن كل عنصر من س يرتبط به على الأكثر عنصر واحد من ع وبالتالي فالعلاقة التي بيانها $ر_١$ هي تابع ، والعلاقة التي بيانها $ر_٢$ ليست تابعاً وذلك لوجود زوجين مرتبين (٣،٢) ، (٣،٦) المركبة الأولى واحدة في كل منهما ، أي أن العنصر ٣ من المنطلق يرتبط بعنصرين من المستقر .

وكذلك العلاقة التي بيانها $ر_٣$ ليست تابعاً لوجود ثلاثة أزواج مرتبة في البيان ، المركبة الأولى واحدة فيها جميعاً .

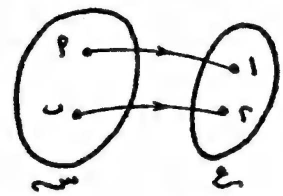
أما العلاقة التي بيانها $ر_٤$ فهي تابع وهي بالإضافة لذلك تطبيق من س إلى ع لأن كل عنصر من المنطلق يرتبط بعنصر واحد من المستقر .

٢٤٢ – لدينا المجموعتان $س = \{أ ، ب\}$ ، $ع = \{١ ، ٢\}$

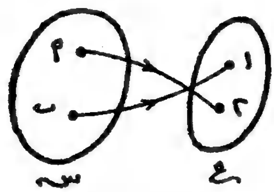
ما هي التطبيقات الممكنة من س إلى ع ؟

الحـل :

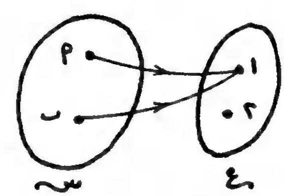
إن التطبيقات الممكنة هي الممثلة بالمخططات الآتية :



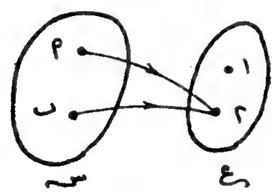
الشكل (١٧٠)



الشكل (١٧١)



الشكل (١٧٢)



الشكل (١٧٣)

ويلاحظ في جميع هذه المخططات أن كل عنصر من سـ يرتبط به عنصر واحد من ع .

٢٤٣ – ليكن س عنصراً من ط* والعبارة :

س ← سـ = { ن : ن ∈ ط* و ن | س }

علماً أن (ن | س) يعني (ن تقسم س) .

١ – عيّن سـ من أجل س = ١ ، س = ٢ ، س = ٨

٢ – هل يمكن استخدام العبارة المفروضة في تعريف تابع ؟ ما منطلقه وما مستقره ؟

الحـل :

١ – من أجل أي عنصر س ∈ ط* تكون سـ مجموعة جميع قواسم

س وعلى ذلك فان :

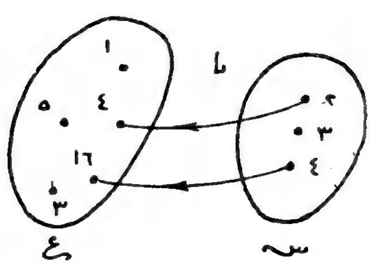
س = ١ ← سـ = { ١ }
س = ٢ ← سـ = { ١، ٢ }
س = ٨ ← سـ = { ١، ٢، ٤، ٨ }

٣ – إن كل عنصر س ∋ ط* له قاسم واحد على الأقل وبالتالي فان كل عنصر س ∋ ط* تقابله وفق العباره المفروضة مجموعة وحيدة هي مجموعة جميع قواسم س . وبما أن مجموعة قواسم س ليست إلا مجموعة جزئية من ط* أي ليست سوى عنصر من المجموعة ج (ط*) مجموعة جميع أجزاء ط* ، فيمكننا باستخدام العبارة المفروضة الحصول على التابع :

تا : ط* ← ج (ط*) : س ← سـ

تساوي تابعين ، مقصور تابع ، ممدد تابع

٢٤٤ – هل التابع تا الممثل بالشكل (١٧٤) :



الشكل (١٧٤)

والتابع ها ، { ٢ ، ٤ } ← ج : س ← س^٢ متساويان ؟

الحل :

التابعان تا ، ها متساويان لأن لهما مجموعة التعريف نفسها ولأن قيمتيهما

عند كل عنصر من مجموعة التعريف متساويتان أي أن :

تا (٢) = ٤ و ها (٢) = $٢^٢$ = ٤ ومنه تا (٢) = ها (٢)

و تا (٤) = ١٦ و ها (٤) = $٤^٢$ = ١٦ ومنه تا (٤) = ها (٤)

٢٤٥ – هل التوابع :

$تا_١$: ح ← ح : س ← $س^٢$ + ٢ س – ٥

$تا_٢$: ح ← ح : ز ← $ز^٢$ + ٢ ز – ٥

$تا_٣$: ح ← ح : ع ← $ع^٢$ + ٢ ع – ٥

متساوية ؟

الحل :

$تا_١$ = $تا_٣$ لأنها معرّفة على المجموعة ح نفسها ولأن :

$تا_١$ (س) = $تا_٣$ (س) = $تا_٣$ (س) ∀ س ∈ ح

٢٤٦ – هل التابعان :

$تا_١$: {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ← ح : س ← $س^٣$ + ١

$تا_٢$ ، {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ← ح : س ← $س^٣$ + ١

متساويان ؟

الحل :

$تا_١$ ≠ $تا_٢$ بالرغم من كون قاعدة التقابل نفسها في التابعين وذلك لأن مجموعتي التعريف لهما مختلفتان .

٢٤٧ – لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← س + ٢

عيّن مقصوره على المجال المغلق [٢ ، ٣] . وأوجد مجموعة قيم هذا المقصور .

الحل :

إن مقصور تا على المجال [٢،٣] هو التابع

ها : [٢،٣] ← ح : س ← س + ٢

وبما أن : ها (٢) = ٢ + ٢ = ٤ ، ها (٣) = ٣ + ٢ = ٥

فمجموعة قيم ها هي المجال المغلق [٤،٥] ⊇ ح (المستقر) .

٢٤٨ – لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← $\frac{س + ١}{س}$

عيّن أوسع مجموعة جزئيـة من المنطلق ح يكون مقصور تا عليها تطبيقاً . عيّن قيم هذا المقصور من أجل

س = − ١ ، س = ١ ، س = ٥

الحل :

إن مجموعة تعريف تا هي المجموعة ح* وهي أوسع مجموعة يكون مقصور تا عليها تطبيقاً .

ويكون المقصور هو التطبيق :

ها : ح* ← ح : س ← $\frac{س + ١}{س}$

ويكون : ها (−١) = ٠

ها (١) = ٢

ها (٥) = ١,٢

٢٤٩ – إذا كان م هو التطبيق المطابق في مجموعة سـ ، فان مقصور م على أية مجموعة جزئية ع ⊇ سـ يسمى **التطبيق القانوني** للمجموعة ع في المجموعة سـ . مـا هو التطبيق القـانوني

للأعداد الأولية في مجموعة الأعداد الطبيعية ط . وما هي صور الأعداد ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ بواسطة هذا التطبيق .

الحــل :

بفرض ل هي مجموعة الأعداد الأولية فان التطبيق القانوني المطلوب هو التطبيق :

تا : ل ⟵ ط : س ⟵ س

ونجد في هذا التطبيق :

تا (٢) = ٢ ، تا (٣) = ٣ ، تا (٥) = ٥

في حين أنه ليس للعدد ٦ مقابل لأن ٦ ∉ ل .

٢٥٠ - لدينا التابعان :

تا : {١ ، ٢ ، ٣} ⟵ ح : س ⟵ $\frac{١}{س}$

ها : [١ ، ٣] ⟵ ح : س ⟵ $\frac{١}{س}$

بيّن أن ها هو ممدد تا على المجال [١ ، ٣] .

الحــل :

إن ها هو ممدد تا على المجال [١،٣] لأن تا هو مقصور ها على المجموعة {١ ، ٢ ، ٣} ⊂ [١،٣] .

٢٥١ - ليكن التابع تا : ح + ⟵ ح : س ⟵ س

اذكر أي التوابع الآتية يكون ممدداً للتابع تا وأيها ليس كذلك ؟

ها$_١$: ح ⟵ ح : س ⟵ |س|

ها$_٢$: [-١،١] ⟵ ح : س ⟵ س

$$ها_3 : ح \leftarrow ح : س \leftarrow \frac{س + |س|}{2}$$

$$ها_4 : ح \leftarrow ح : س \leftarrow س$$

بما أن $|س| = س$ من أجل $س \geq 0$ فان مقصور ها$_1$ على $ح^+$ هو التابع تا . إذن ها$_1$ هو ممدد للتابع تا .

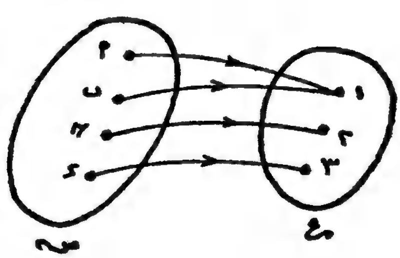
وبما أن $ح^+$ ليست جزءاً من $[-1 ، 1]$ فلا يمكن أن يكون ها$_2$ ممدداً للتابع تا .

وبما أنه من أجل $س \geq 0$ يكون $\frac{س + |س|}{2} = \frac{س + س}{2} = س$ فان مقصور ها$_3$ على $ح^+$ هو التابع تا . إذن ها$_3$ هو ممدد للتابع تا .

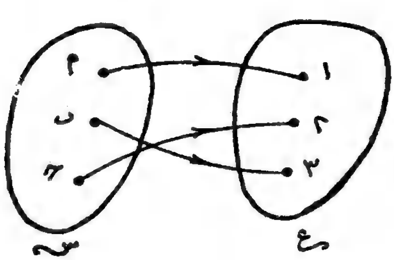
وأخيراً من الواضح أن ها$_4$ هو أيضاً ممدد للتابع تا .

التطبيق المتباين ، التطبيق الغامر ، التقابل :

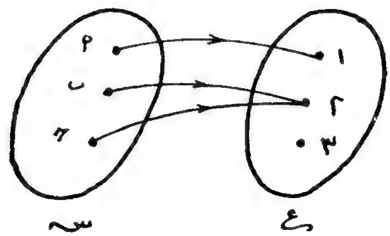
٢٥٢ – أيُّ التطبيقات الممثلة في الأشكال الآتية تطبيق متباين ؟



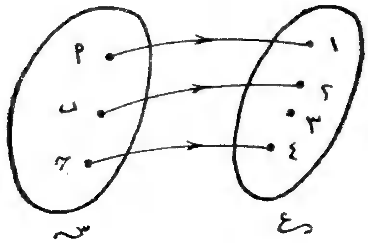
الشكل (١٧٥)



الشكل (١٧٦)



الشكل (١٧٧)



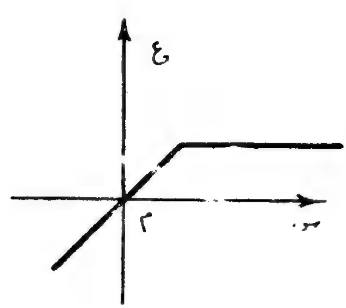
الشكل (١٧٨)

الحل :

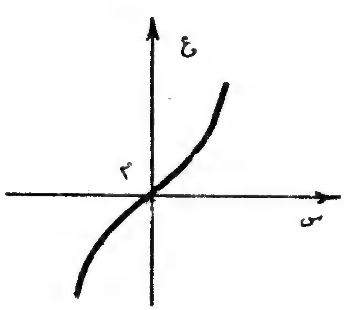
كل من الشكلين (١٧٦) ، (١٧٨) فقط يمثل تطبيقاً متبايناً ، فالسهمان المنطلقان من عنصرين مختلفين في س يستقران في عنصرين مختلفين في المستقر ع .

أما الشكل (١٧٧) فهو تطبيق غير متباين لأنه يستقر في العنصر(٢) سهمان وكذلك فان الشكل (١٧٥) تطبيق غير متباين لأنـه يستقر في العنصر (١) سهمان .

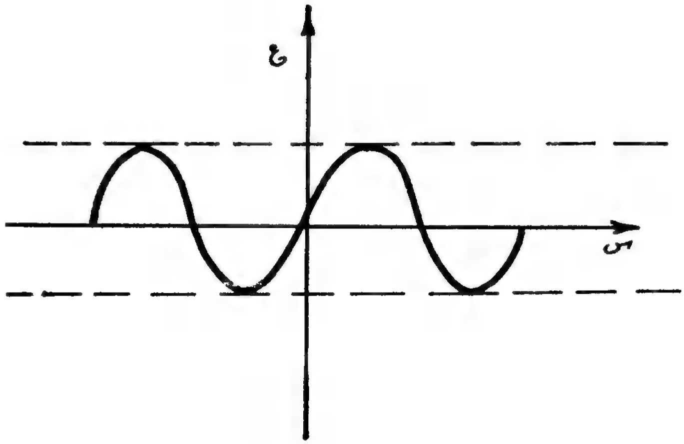
٢٥٣ – ما خاصة المخطط الديكارتي لتطبيق متباين ؟ أي المخططات الديكارتية الآتية هي مخطط تطبيق متباين لـ ح في ح .



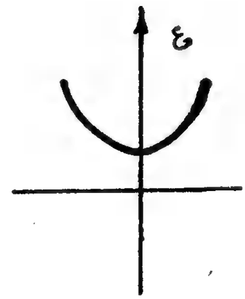
الشكل (١٧٩)



الشكل (١٨٠)



الشكل (١٨٢)



الشكل (١٨١)

الحـل :

بفرض تا (س$_١$) = ع$_١$ ، تا (س$_٢$) = ع$_٢$

فالشرط س$_١$ ≠ س$_٢$ ⇐ تا (س$_١$) ≠ تا (س$_٢$)

يعني أن س$_١$ ≠ س$_٢$ ⇐ ع$_١$ ≠ ع$_٢$ أو ع$_١$ = ع$_٢$ ⇐ س$_١$ = س$_٢$

ومعنى هذا عدم وجود نقطتين مختلفتين من المخطط الديكارتي على مستقيم يوازي م س . وعلى ذلك فان الشكل (١٨٠) فقط هو مخطط تطبيق متباين .

٢٥٤ – ما هي خاصة بيان التطبيق المتباين ؟

لتكن المجموعتان سـ = { ا ، ب ، حـ ، ء }

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

و تا$_١$ ، تا$_٢$ ، تا$_٣$ ، تا$_٤$ تطبيقات من سـ إلى ع بياناتها على الترتيب .

{ (ا ، ١) ، (ب ، ٢) ، (حـ ، ٥) ، (ء ، ٤) }

$\{$ (أ، ٢) ، (ب، ١) ، (حـ، ٣) ، (ء، ٣) $\}$
$\{$ (ب، ٥) ، (أ، ٢) ، (حـ، ٤) ، (ء، ٣) $\}$
$\{$ (أ، ٣) ، (ب، ٣) ، (حـ، ٢) ، (ء، ٣) $\}$

الحل :

ليس في بيان التطبيق المتباين زوجان مرتبان لهما المركبة الثانية نفسها . ولذا فان التطبيقين تا$_١$ ، تا$_٣$ ، متباينان ، إن كلاً من التطبيقين تا$_٢$ ، تا$_٤$ غير متباين .

٢٥٥ – برهن أن التطبيق تا : ح ⟵ ح : س ⟵ س^٣ متباين

الحل :

طريقة أولى : $\forall$ س$_١$ ، س$_٢$ $\in$ ح (المنطلق)

فان س$_١$ $\neq$ س$_٢$ $\Leftarrow$ س$_١^٣$ $\neq$ س$_٢^٣$ لأن مكعبي عددين مختلفين مختلفان
$\Leftarrow$ تا (س$_١$) $\neq$ تا (س$_٢$)

طريقة ثانية :

تا (س$_١$) = تا (س$_٢$) $\Leftarrow$ س$_١^٣$ = س$_٢^٣$ بالتعريف
$\Leftarrow$ س$_١$ = س$_٢$ الجذران التكعيبيان لعددين متساويين متساويان

٢٥٦ – برهن أن التطبيق تا : ح ⟵ ح : س ⟵ س^٢–١ غير متباين .

الحل :

تا (س$_١$) = تا (س$_٢$) $\Leftarrow$ س$_١^٢$ – ١ = س$_٢^٢$ – ١ بالتعريف
$\Leftarrow$ س$_١^٢$ = س$_٢^٢$
$\Leftarrow$ س$_١$ = $\mp$ س$_٢$

وبما أن الشرط :

تا $(س_1)$ = تا $(س_2)$ ⇐ $س_1 = س_2$ لم يتحقق اذن فالتطبيق المفروض غير متباين .

٢٥٧ – بفرض ط مجموعة الأعداد الطبيعية ، هل التطبيق :

تا : ط × ط ⟵ ط : (س،ع) ⟵ س + ع

متباين ؟

الحل : لدينا :

تا ((س،ع)) = تا ((س′،ع′)) ⇐ س + ع = س′ + ع′ بالتعريف

وهذا لا يؤدي إلى كون س = س′ و ع = ع′ بصورة عامة

فمن المعلوم مثلاً أن العدد ٤ هو صورة الأزواج المختلفة (٢،٢) ، (١،٣) ، (٣،١) وفق تا وذلك لأن :

تا ((١،٣)) = ١ + ٣ = ٤

و تا ((٣،١)) = ٣ + ١ = ٤

و تا ((٢،٢)) = ٢ + ٢ = ٤

ولذا فالتطبيق المفروض غير متباين .

٢٥٨ – أيُّ التوابع الآتية تابع متباين ؟

١ – تا :] ٠ ، ١] ⟵ ح : س ⟵ $س^2$ – ١

٢ – ها : [–١ ، ٠ [⟵ ح : س ⟵ $س^2$ – ١

٣ – لا : [–١ ، ١] ⟵ ح : س ⟵ $س^2$ – ١

الحل :

١ – لدينا تا $(س_1)$ = تا $(س_2)$ ⇐ $س_1^2$ – ١ = $س_2^2$ – ١ (بالتعريف)

$\Leftarrow$ س$_1^2$ − س$_2^2$ = ٠ $\Leftarrow$ (س$_1$ − س$_2$) (س$_1$ + س$_2$) = ٠

$\Leftarrow$ س$_1$ − س$_2$ = ٠ لأن س$_1$ + س$_2$ $\neq$ ٠ في منطلق التابع

$\Leftarrow$ س$_1$ = س$_2$

اذن التابع تا متباين .

٢ – بطريقة مماثلة لما سبق لدينا :

ها (س$_1$) = ها (س$_2$) $\Leftarrow$ (س$_1$ − س$_2$) (س$_1$ + س$_2$) = ٠

$\Leftarrow$ س$_1$ − س$_2$ = ٠ لأن س$_1$ + س$_2$ $\neq$ ٠
في منطلق التابع

$\Leftarrow$ س$_1$ = س$_2$

اذن التابع ها متباين .

٣ – وكذلك لدينا :

لا (س$_1$) = لا (س$_2$) $\Leftarrow$ (س$_1$ − س$_2$) (س$_1$ + س$_2$) = ٠

$\Leftarrow$ س$_1$ = س$_2$ أو س$_1$ + س$_2$ = ٠

ولما كان هذا الشرطان ممكنين في منطلق هذا التابع . فالتابع غير متباين .

٢٥٩ – أيّ التطبيقات الآتية تطبيق غامر ؟

١ – تا : ح ← ح : س ← ٢ س + ١

٢ – تا : ح* ← ح : س ← $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}}$

٣ – تا : ص$^+$ ← ص$^+$: س ← س^2

الحل :

١ – لنبحث عما إذا كان كل عنصر ع ∈ ح (المستقر) هو صورة وفق تا لعنصر س على الأقل من ح (المنطلق) .

في الحقيقة ، لكي يكون ع صورة لعنصر س يجب أن يكون

$$٢س + ١ = ع \quad \text{ومنه} \quad س = \frac{ع - ١}{٢} \qquad (١)$$

ومن الواضح أنه مهما كان ع ∋ ح (المستقر) فان ع هو صورة لعنصر من س ∋ ح (المنطلق) معين بالعلاقة (١) .

٢ – ليكن ع عنصراً من ح (المستقر) ، فلكي يكون ع صورة لعنصر س من ح* (المنطلق) يجب أن يكون :

$$\frac{س + ١}{س} = ع \quad \text{ومنه} \quad س = \frac{١}{ع - ١} \qquad (٢)$$

وواضح من العلاقة (٢) أن العنصر ١ ∋ ح (المستقر) ليس صورة لأي عنصر س من المنطلق ح*. ولذا فالتابع تا غير غامر .

٣ – لكي يكون عنصر ع من المستقر ، صورة لعنصر س من المنطلق يجب أن يكون :

$$س^٢ = ع \quad \text{ومنه} \quad س = \sqrt{ع} \qquad (٣)$$

وبما أن جذر العدد الصحيح الموجب ليس صحيحاً بالضرورة مثل $\sqrt{٣}$ فالعلاقة (٣) تدل على أن بعض الأعداد الصحيحة من المستقر ليست صوراً لأعداد صحيحة موجبة من المنطلق ، فالتابع تا اذن غير غامر

٢٦٠ – بفرض ط مجموعة الأعداد الطبيعية ، برهن أن التطبيق

تا : ط × ط ⟵ ط : (س،ع) ⟵ س.ع

غامر .

الحل :

بما أن أي عنصر من المستقر ط هو حاصل ضرب عددين طبيعيين

أي أنه صورة لعنصر واحد على الأقل من ط × ط ، **فالتطبيق تا غامر.**

٢٦١ – لدينا التطبيقات :

١ – تا : ح ← ح : س ← $س^٢$

٢ – ها : ح ← $ح^+$: س ← $س^٢$

٣ – قا : $ح^+$ ← ح : س ← $س^٢$

٤ – كا : $ح^+$ ← $ح^+$: س ← $س^٢$

بيّن من أجل كل تطبيق ، **هل هو** متباين ؟ **هل هو** غامر ؟ **هل هو** تقابل ؟

الحل :

١ – بفرض $س_١$ ، $س_٢$ عنصرين من المنطلق يكون :

تا ($س_١$) = تا ($س_٢$) ⇐ $س_١^٢ = س_٢^٢$ (بالتعريف)

⇐ ($س_١$ – $س_٢$) ($س_١$ + $س_٢$) = ٠

⇐ $س_١$ = $س_٢$ أو $س_١$ = – $س_٢$

وكلا الحالتين ممكنتان في المنطلق ح ، فالتابع تا **غير متباين.**

وبفرض ع ∋ ح (المستقر) و س ∋ ح (**المنطلق**) ويقابل ع وفق تا ، يكون :

$س^٢$ = ع ⇐ س = ± $\sqrt{ع}$ (يؤخذ الجذرين لأن س ∋ ح)

وبما أن عملية الجذر التربيعي لا تتم إلا من أجل ع ≥ ٠ ، **فليس** كل عنصر من المستقر يقابل عنصراً على الأقل من المنطلـق ، **فالتابع تا غير غامر .**

وبما أن تا غير متباين وغير غامر فهو **ليس تقابلاً .**

٢ – بطريقة مماثلة لما رأيناه في تا نجد أن التابع ها **غير متباين .**

وبفرض ع ∋ ح+ (المستقر) و س ∋ ح (المنطلق) ويقابل ع وفق ها ، يكون $س^2 = ع \Leftrightarrow س = \pm\sqrt{ع}$.

وبما أن ع ∋ ح+ فعملية الجذر التربيعي ممكنة مهما كان ع من من المستقر ، أي أن كل عنصر من المستقر يقابل عنصراً على الأقل من المنطلق ، فالتابع ها غامر .

وبما أن التابع ها غامر وغير متباين فهو ليس تقابلا .

٣ – لدينا قا $(س_1) =$ قا $(س_2) \Leftarrow (س_1 - س_2)(س_1 + س_2) = 0$
$\Leftarrow س_1 - س_2 = 0$ (لعدم وجود عددين مختلفين في ح+ مجموعهما صفر)
$\Leftarrow س_1 = س_2$
اذن فالتابع قا متباين .

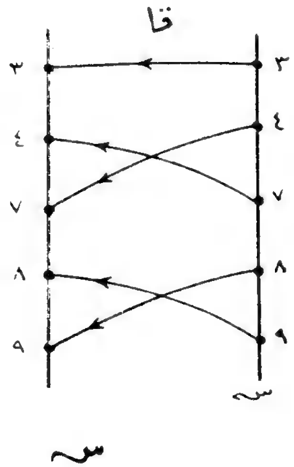
وبفرض ع ∋ ح (المستقر) و س ∋ ح+ (المنطلق) ويقابل ع وفق قا ، يكون $س^2 = ع \Leftrightarrow س = \sqrt{ع}$ (ويقتصر على الجذر الموجب لأن س ∋ ح+) . وواضح أن كل عنصر ع ≤ 0 (فقط) من المستقر يقابل عنصراً من المنطلق والتابع تا غير غامر .

وبما أن قا متباين وغير غامر فهو ليس تقابلا

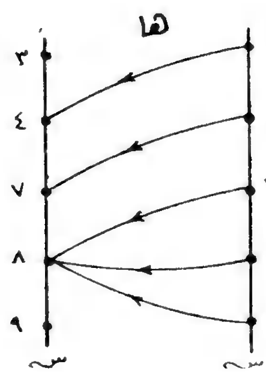
٤ – لأسباب مماثلة لما رأيناه في التابع قا نرى أن التطبيق كا متباين ولأسباب مماثلة لما رأيناه من أجل التابع ها نجد أن التطبيق كا غامر .

وبما أن كا متباين وغامر فهو تقابل .

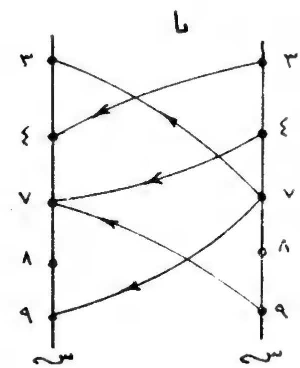
٢٦٢ – لتكن المجموعة سـ = {٣ ، ٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩} والتطبيقات الثلاثة تا ، ها ، قا الممثلة في الأشكال (١٨٣) ، (١٨٤) ، (١٨٥) أي من هذه التطبيقات يقبل تطبيقاً عكسياً ؟



الشكل (١٨٥)



الشكل (١٨٤)



الشكل (١٨٣)

الحـــل :

من المعلوم أنه كي يقبل التطبيق تطبيقاً عكسياً يجب أن يكون التطبيق المفروض تقابلاً . وبما أن قا هو التقابل بين التطبيقات المفروضة فله تقابل عكسي .

٢٦٣ – برهن أن التطبيق :

تا : ح ← ح : س ← ٨ س^{٣} − ١

تقابل ، ثم أوجد التطبيق العكسي له .

الحـــل :

بفرض س$_{١}$ ، س$_{٢}$ عنصرين من ح (المنطلق) يكون :

تا (س$_{١}$) = تا (س$_{٢}$) ⇐ ٨ س$_{١}^{٣}$ − ١ = ٨ س$_{٢}^{٣}$ − ١

⇐ ٨ س$_{١}^{٣}$ = ٨ س$_{٢}^{٣}$

⇐ س$_{١}^{٣}$ = س$_{٢}^{٣}$ ⇐ س$_{١}$ = س$_{٢}$

فالتابع تا متباين .

وبفرض ع ∋ ح (المستقر) و س ∋ ح (المنطلق) الذي يقابله ع يكون :

$$٨ س^٣ - ١ = ع \Leftrightarrow س = \frac{\sqrt[٣]{ع+١}}{٢} \qquad (١)$$

وواضح أن ∀ ع ∋ ح ⇐ ع + ١ ∋ ح ⇐ $\frac{\sqrt[٣]{ع+١}}{٢}$ ∋ ح أي أنه من أجل كل عنصر ع من المستقر يقابله عنصر س من المنطلق، فالتابع تا غامر . وأخيراً فالتابع تا هو تقابل .

وبفرض ع هي صورة س وفق تا فان س تكون صورة ع وفق التقابل العكسي $تا^{-١}$ أي أن :

$$س = تا^{-١} (ع)$$

وحسب (١) يكون : $تا^{-١} (ع) = \frac{\sqrt[٣]{ع+١}}{٢}$

ويكون التقابل العكسي :

$$تا^{-١} : ح \longrightarrow ح : ع \longrightarrow \frac{\sqrt[٣]{ع+١}}{٢}$$

وبما أن ع رمز اختياري لمتحول التطبيق ، أمكننا كتابة التقابل العكسي بالشكل :

$$تا^{-١} : ح \longrightarrow ح : س \longrightarrow \frac{\sqrt[٣]{س+١}}{٢}$$

مستخدمين س الرمز المألوف لمتحول تابع .

٢٦٤ - لدينا التطبيق :

$$تا : ح - \{٥\} \longrightarrow ح - \{٢\} : س \longrightarrow \frac{٢ س + ١}{س - ٥}$$

برهن أن تا تقابل وأوجد $تا^{-1}$.

الحـــل :

بفرض $س_1$ ، $س_2$ عنصرين من المنطلق يكون لدينا :

$$تا(س_1) = تا(س_2) \Leftarrow \frac{2س_1 + 1}{س_1 - 5} = \frac{2س_2 + 1}{س_2 - 5} \quad (\text{بالتعريف})$$

$\Leftarrow$ $(2س_1 + 1)(س_2 - 5) = (2س_2 + 1)(س_1 - 5)$ لأن $س_1 \neq 5$ ، $س_2 \neq 5$

$\Leftarrow$ $س_1 = س_2$ ، فالتطبيق تا متباين .

وبفرض ع عنصراً من المستقر و س عنصراً من المنطلق يقابـــله ع يكون

$$ع = \frac{2س + 1}{س - 5}$$

وبحساب س بدلالة ع نجد :

$$س = \frac{5ع + 1}{ع - 2}$$

وبما أن الكسر في العلاقة الأخيرة معرّف مهما كانت ع من المستقر $ح - \{2\}$ لأن $ع \neq 2$. فكل عنصر ع من المستقر يقابله وفق تا عنصر س من المنطلق أي أن التطبيق تا غامر . وأخيراً فالتطبيق تا تقابل .

ونجد بسهولة أن التطبيق العكسي هو :

$$تا^{-1} : ح \longleftarrow ح : س \longleftarrow \frac{5س + 1}{س - 2}$$

٣٦٥ – تمثل كل علاقة من العلاقات الواردة في هذا التمرين تطبيقاً لـ ح في ح اكتب العلاقة الممثـلة لـ حا ه تا وعيّن مجموعة

تعريف ومجموعة قيم هذا التابع المركب في كل حـــالة من الحالات التالية :

أ – $تا (س) = س + ٤$ ، $حا (س) = س - ٧$

ب – $تا (س) = ٣ س - ٥$ ، $حا (س) = س^{٢}$

حـ – $تا (س) = ٤ س + ١$ ، $حا (س) = س^{٣}$

ء – $تا (س) = س - ١$ ، $حا (س) = \frac{١}{١ + س^{٢}}$

الحـــل :

لنرمز لمجموعـة منطلق تا بـ سـ ولمتحولها بـ س ولمجموعة مستقره بـ ع ولمتحولها بـ ع فتكون مجموعة منطلق حا هي ع نفسها ، ولنرمز لمجموعة مستقرها بـ صـ ولمتحولها بـ ص ، فيكون :

أ – إن التطبيق تا غامر ومتباين يقابل بين كل عنصر س ∋ سـ وعنصر ع ∋ ع بحيث يكون ع = س + ٤ وإن التطبيق حا (س) غامر ومتباين أيضاً يقابل بين كل عنصر ع ∋ ع وعنصر وحيد ص ∋ صـ بحيث يكون :

$$ص = ع - ٧ \Leftarrow ص = (س + ٤) - ٧ = س - ٣$$

أي $حا [تا (س)] = س - ٣$ أو $س \xrightarrow{حا \circ تا} س - ٣$

إن التابع حا ∘ تا تطبيق غامر ومتباين (تقابل) ، فمجموعـة تعريفه ح ومجموعة قيمه ح .

ب – إن التطبيق تا تقابل يحقق العلاقة ع = ٣ س - ٥ أما التطبيق حا فهو غير غامر وغير متباين لأن مجموعة قيمة ح + ولأن $(\pm س)^{٢} = س^{٢}$ وهو يحقق العلاقة :

$$ص = ع^{٢} \Leftarrow ص = (٣ س - ٥)^{٢}$$

أي $\text{حا} [\text{تا} (\text{س})] = (٣\text{س} - ٥)^{٢}$

إن التطبيق حا ه تا من ح إلى ح ليس بغامر لأن مجموعة قيمه هي ح^{+} وليس بمتباين لأن :

$$\text{س} = \text{ب} + \frac{٥}{٣} \Leftarrow \text{ص} = (٣\text{ب})^{٢} = ٩\text{ب}^{٢}$$

$$\text{و س} = -\text{ب} + \frac{٥}{٣} \Leftarrow \text{ص} = (-٣\text{ب})^{٢} = ٩\text{ب}^{٢}$$

وأما مجموعة تعريف هذا التطبيق فهي مجموعة منطلقه ح .

ج – تا (س) تقابل علاقته $\text{ع} = ٤\text{س} + ١$ و حا (س) تقابل أيضاً علاقته :

$$\text{ص} = \text{ع}^{٣} \Leftarrow \text{ص} = (٤\text{س} + ١)^{٣}$$

إن التطبيق حا ه تا متباين وغامر يطبق ح على ح .

د – تا تقابل علاقته $\text{ع} = \text{س} - ١$ أما حا فهو تطبيق غير غامر وغير متباين يحقق العلاقة $\text{ص} = \frac{١}{١ + \text{ع}^{٢}} = \frac{١}{١ + (\text{س} - ١)^{٢}}$

إن التطبيق المركب : $\text{س} \xrightarrow{\text{حا ه تا}} \frac{١}{١ + (\text{س} - ١)^{٢}}$

ليس بغامر لأن قيمته موجبة دوماً أي مجموعة قيمه هي ح^{+} وليس بمتباين لأن :

$$\text{س} = \text{ب} + ١ \leftarrow \text{ص} = \frac{١}{١ + \text{ب}^{٢}}$$

$$\text{و س} = -\text{ب} + ١ \leftarrow \text{ص} = \frac{١}{١ + \text{ب}^{٢}}$$

وأما مجموعة تعريفه فهي ح .

٢٦٦ – تعرّف العلاقتان: تا (س) = (٢س–٧) و حا (س) = $\frac{س + ١}{س - ١}$

تابعين من ع ← ع (حيث ع مجموعة الأعداد العادية).

أ – اكتب علاقة التابع المركب: حا ∘ تا وعيّن مجموعة تعريف هذا التابع.

ب – ما هي المجموعة التي يجب أن نأخذها منطلقاً للتابع تا ليصبح حا ∘ تا تطبيقاً:

الحل:

إن التابع تا (س) = ٢ س – ٧ يربط بكل عنصر س ∈ ع عنصراً وحيداً من ع فهو تطبيق وهو غامر ومتباين، إذا رمزنا بـ ع لمتحول مستقره فانه يحقق علاقة من الشكل:

$$ع = ٢ س - ٧$$

أما التابع حا (س) فانه لا يمثل تطبيقاً لأنه غير معرف من أجل س = + ١ من المنطلق ع، إذا رمزنا بـ ع لمتحول منطلقه وبـ ص لمتحول مستقره فان علاقة هذا التابع هي:

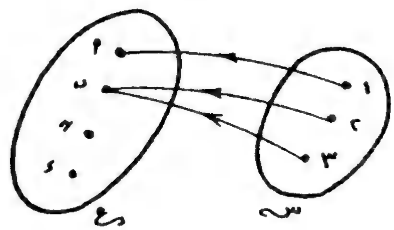
$$ص = \frac{ع + ١}{ع - ١} \Leftarrow ص = \frac{(٢ س - ٧) + ١}{(٢ س - ٧) - ١} = \frac{٢ س - ٦}{٢ س - ٨}$$

إن مجموعة تعريف هذا التابع كتابع مركب حا ∘ تا هي ع – {٤}

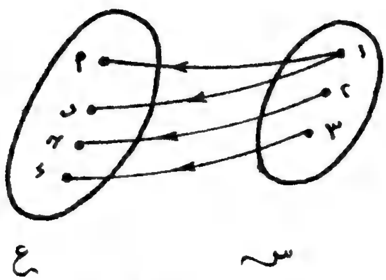
حـ – يصبح التابع حا ∘ تا تطبيقاً إذا كان منطلقه مساوياً لمجموعة تعريفه أي إذا كانت مجموعة منطلقة هي المجموعة ع – {٤}.

تمارين غير محلولة

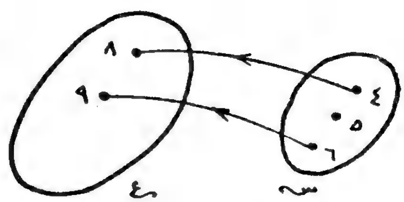
٢٦٧ – بيّن أي الأشكال الآتية يمثل تابعاً ، وعيّن مجموعة تعريف كل تابع :



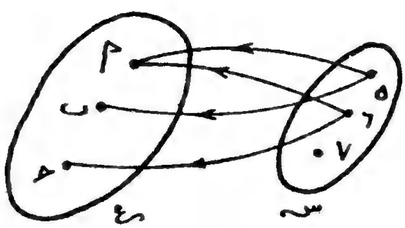
الشكل (١٨٦)



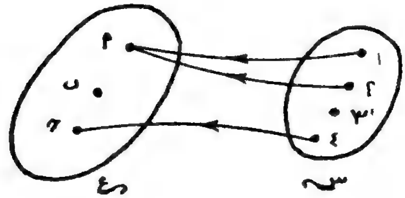
الشكل (١٨٧)



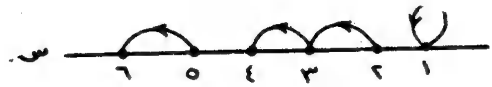
الشكل (١٨٨)



الشكل (١٨٩)

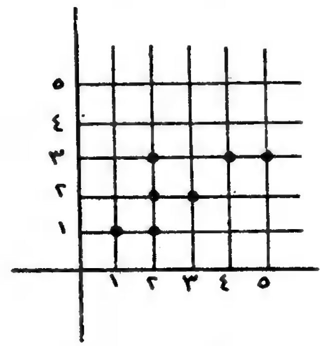


الشكل (١٩٠)

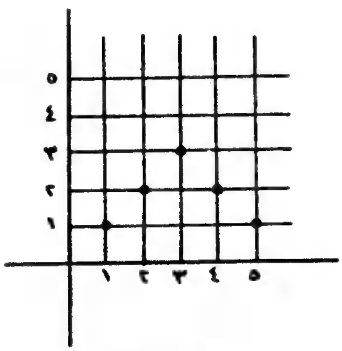


الشكل (١٩١)

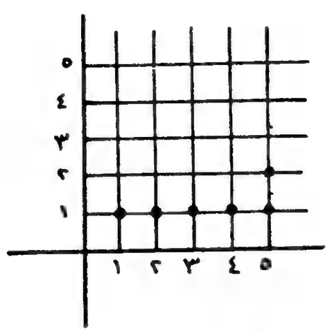
٢٦٨ – لتكن س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } والعلاقات من س إلى س الممثلة بالأشكال (١٩٢) ، (١٩٣) ، (١٩٤) :



الشكل (١٩٢)



الشكل (١٩٣)

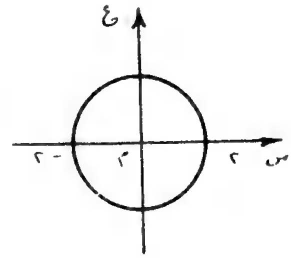


الشكل (١٩٤)

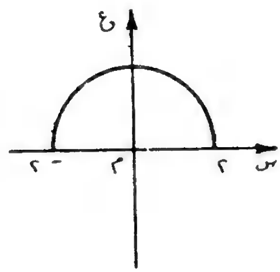
أي هذه الأشكال يمثل تابعاً ؟

٢٦٩ – أي العلاقات الآتيـة من ح إلى ح والممثـلة بالمخططـات

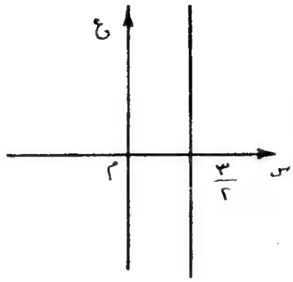
الديكارتية الآتية هي تابع . عين مجموعة تعريف كل تابع .



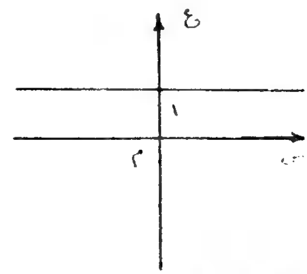
الشكل (١٩٥)



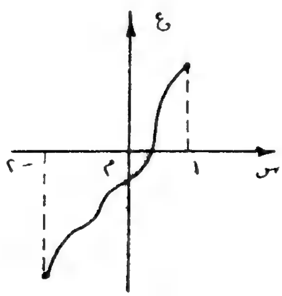
الشكل (١٩٦)



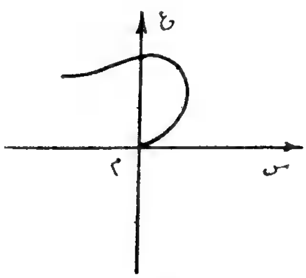
الشكل (١٩٧)



الشكل (١٩٨)



الشكل (١٩٩)



الشكل (٢٠٠)

٢٧٠ – لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← تا (س)

مع العلم أن : تا (س) = ٠ من أجل س ⩽ ٠ ، تا (س) = س من أجل ٠ < س ⩽ ١ ، تا (س) = − ١ من أجل س > ١

١ – عيّن مجموعة تعريف التابع تا ، وأوجد قيمة تا (− ٤) ، تا (٠) ، تا ($\frac{١}{٢}$) ، تا (٢) ، تا (٥٠) .

٢ – ارسم المخطط الديكارتي لهذا التابع .

٢٧١ – لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← تا (س)

مع العلم أن : $تا(س) = -س$ من أجل $-٥ \leqq س < ٠$

و $تا(س) = س^٢$ من أجل $٠ \leqq س \leqq ٢$

١ً – ما مجموعة تعريف التابع تا ؟

٢ً – ارسم المخطط الديكارتي للتابع تا .

٢٧٢ – ميّز التطبيقات بين التوابع الآتية :

$تا_١$: ج ← ح : س ← طوله لأقرب سنتمتر

حيث ج مجموعة سكان القاهرة

$تا_٢$: جَ ← ط : س ← عمره لأقرب سنة

حيث جَ مجموعة طلاب إحدى الثانويات .

$$تا_٣ : ع \leftarrow ع : س \leftarrow \frac{س + ١}{س}$$

$$تا_٤ : ح \leftarrow ح : س \leftarrow \sqrt{س^٢ + ١}$$

$$تا_٥ : ح \leftarrow ح : س \leftarrow \frac{\sqrt{س}}{س - ١}$$

٢٧٣ – لدينا المجموعة سں = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

والعلاقات $ر_١$ ، $ر_٢$ ، $ر_٣$ ، $ر_٤$ من سں الى سں التي بياناتها على الترتيب هي :

{ (١،١) ، (١،٢) ، (٢،٣) ، (٤،٥) }

{ (١،٢) ، (٢،٣) ، (٣،١) ، (٤،٥) }

{ (١،١) ، (٢،١) ، (٣،١) ، (٤،٣) ، (٥،٢) }

{ (١،٢) ، (٢،٢) ، (٢،٣) ، (٣،٥) ، (٤،١) }

أي العلاقات السابقة توابع ، عين مجموعة تعريف كل تابع وعين التطبيق من التوابع .

٢٧٤ – لدينا المجموعتان سـ = { أ، ب } و ع = { ١، ٢ }
ما هي التوابع الممكنة من سـ إلى ع ؟

٢٧٥ – لتكن سـ مجموعة مناحي مستقيمات مستو ولنعتبر فيها العلاقة ر المعرّفة كما يلي :

س ر ع ⟺ س ⊥ ع

أثبت أن العلاقة ر تابع .

٢٧٦ – لدينا المجموعتان سـ = { أ، ب } ، ع = { ١ ، ٢ ، ٣ }
ما هي التطبيقات الممكنة من سـ إلى ع ؟

٢٧٧ – لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← س
عين مقصوره ها على المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } . مثّل هذا المقصور ديكارتياً .

٢٧٨ – لدينا التابعان العدديان لمتحول حقيقي :

$$\text{تا} : ح \leftarrow ح : س \leftarrow \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$$

$$\text{ها} : ح \leftarrow ح : س \leftarrow س + ١$$

هل هذا التابعان متساويان ؟

٢٧٩ – ما التطبيقات المتباينة فيما يلي :

١ – التطبيق الذي يربط بكل ثانوية مديرها .

٢ – التطبيق الذي يربط بكل كتاب عدد صفحاته .

٣ – التطبيق الذي يربط بكل بيت من بيوت دمشق رقمه.

٤ – التطبيق الذي يربط بكل دجاجة وزنها .

٢٨٠ – أمن الممكن أن يكون التطبيق الثابت متبايناً ؟

٢٨١ – ما المجموعة سـ التي يكون عليها التطبيق المطابق متباينا ؟

٢٨٢ – أمن الممكن أن يكون التطبيق الثابت غامراً ؟

٢٨٣ – متى يكون التطبيق الثابت متبايناً وغامراً معاً ؟

٢٨٤ – هل التطبيق المتطابق على مجموعة غامر ؟

٢٨٥ – ليكن سـ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، ع = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٩ }
والتطبيق تا : سـ ← ع : س ← س^{٢} . برهن أن لـ تا تطبيقاً عكسياً يطلب تعيينه .

٢٨٦ – ليكن سـ = ح – { – $\frac{١}{٢}$ } ، ع = ح – { $\frac{١}{٢}$ }

والتطبيق تا : سـ ← ع : س ← $\frac{\text{س} - ٣}{٢\text{س} + ١}$. برهن أن تا$_{١}$ يقبل تطبيقاً عكسياً يطلب تعيينه .

٢٨٧ – نرمز بـ [ب ، حـ] لمجموعة الأعداد الصحيحة س المحققة للعلاقة ب ⩽ س ⩽ حـ وليكن تا ، حا تطبيقين لـ صـ في صـ معرفين بالعلاقتين :

تا (س) = ٢ س و حا (س) = س^{٢}

أجب على الأسئلة التالية :

١ً – هل التابعان تا ، حا غامران أم متباينان ؟

٢ً – بفرض هـ = [– ٣ ، ١] ، هـ' = [٠ ، ٢]

أ – احسب هـ ∪ هـ' واحسب تا (هـ ∪ هـ') و تا (هـ) ∪ تا (هـ')
ماذا تلاحظ ؟

ب – احسب المجموعة حا (هـ ∪ هـ') و حا (هـ) ∪ حا (هـ')
ماذا تلاحظ ؟

حـ – احسب ه ∩ ه′ ، تا (ه ∩ ه′) ، تا (ه) ∩ تا (ه′)
ماذا تلاحظ ؟
د – احسب حا (ه ∩ ه′) ، حا (ه) ∩ حا (ه′) ماذا تلاحظ؟

علماً بأن تا (ه) ، حيث ه مجموعة جزئية من المنطلق ، هي المجموعة المكونة من صور عناصر ه وفق تا

٢٨٨ – ليكن تا ، حا تطبيقين لـ ط في ط معرفين بالعلاقتين :

تا (س) = ٢ س ، { حا (س) = $\frac{١}{٢}$ س إذا كان س زوجياً
{ حا (س) = ٠ إذا كان س فردياً

١ – بيّن فيما إذا كان تا و حا غامرين ومتباينين .

٢ – عرف حا ∘ تا

٣ – حل المعادلات تا (س) = ٤ ، تا (س) = ١٣ ، حا (س) = ٤ ، حا (س) = ١٣ ، حا (س) = ٠

أجوبة وإرشادات

٢٦٧ – كل من الأشكال (١٨٦) ، (١٨٨) ، (١٩٠) ، (١٩١) يمثل تابعاً ومجموعات التعريف هي على الترتيب :
سـ ، {٤ ، ٦} ، {١ ، ٢ ، ٤} ، {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥} .

٢٦٨ – الشكل (١٩٣) يمثل تابعاً حيث كل عنصر من سـ يقابله عنصر وحيد .

٢٦٩ – كل من الأشكال (١٩٦) ، (١٩٨) ، (١٩٩) ، يمثل تابعاً لأن كل عنصر من المنطلق يقابله عنصر على الأكثر من المستقر .. ونتأكد من ذلك برسم مستقيمات توازي م ع فبعض ، هذه المستقيمات لا يشترك مع المخطط بأية نقطة والبعض الآخر

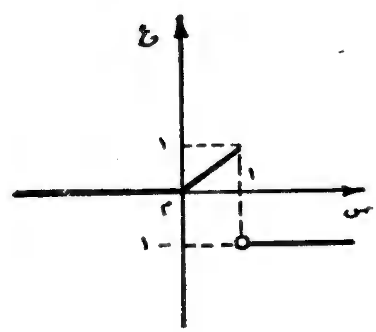
يشترك مع المخطط بنقطة واحدة . ومجموعات تعريف هذه التوابع هي على الترتيب [– ٢ ، ٢] ، ح ، [– ٢ ، ١] .

وكل من الأشكال (١٩٥) ، (١٩٧) ، (٢٠٠) لا يمثل تابعاً لأن بعض المستقيمات الموازية لـ م ع تشترك مع المخطط بأكثر من نقطة .

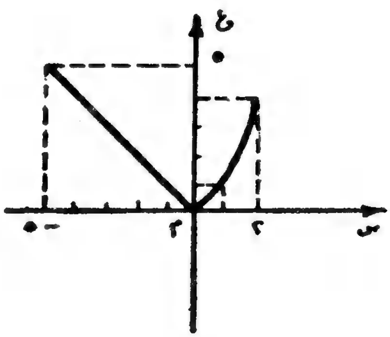
٢٧٠ – ١ً – مجموعة التعريف هي ح ، تا (–٤) = ٠ ، تا (٠) = ٠

تا ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$ ، تا (٢) = – ١ ، تا (٥٠) = – ١

٢ً – المخطط الديكارتي الشكل (٢٠١)



الشكل (٢٠١)



(٢٠٢)

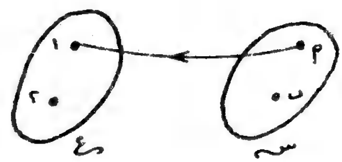
٢٧١ – ١ً – مجموعة تعريف التابع هي المجال [– ٥ ، ٢] .

٢ً – المخطط الديكارتي الشكل (٢٠٢) .

٢٧٢ – التطبيقات هي تا$_{١}$ ، تا$_{٢}$ ، تا$_{٤}$.

٢٧٣ – كل من س$_{١}$ ، س$_{٤}$ ليست تابعاً ، مجموعة تعريف التابع المعين بـ س$_{٢}$ هي { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ومجموعة تعريف التابع المعين بـ س$_{٣}$ هي { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، وهذا التابع تطبيق .

٢٧٤ - يضاف الى التطبيقات الوارة في التمرين المحلول رقم (٢٤٢) التوابع الممثلة بالأشكال (٢٠٣) ، (٢٠٤) ، (٢٠٥) ، (٢٠٦) :



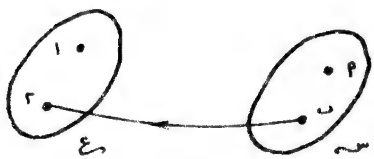
الشكل (٢٠٣)



الشكل (٢٠٤)



الشكل (٢٠٥)



الشكل (٢٠٦)

٢٧٥ - لأن كل منحى س ∋ سـ يقابله منحى من سـ متعامد معه .

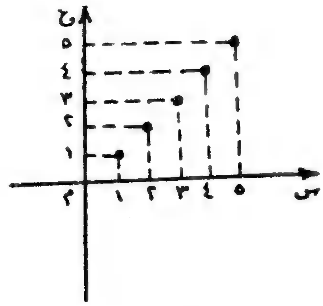
٢٧٦ - هي التطبيقات :

{ أ ← ١ ، ب ← ١ }   { أ ← ٢ ، ب ← ٢ }   { أ ← ٣ ، ب ← ٣ }

{ أ ← ١ ، ب ← ٢ }   { أ ← ١ ، ب ← ٣ }   { أ ← ٢ ، ب ← ٣ }

وكل تطبيق ينتج عن التطبيقات الثلاثة الأخيرة بتبادل موضعي أ وب

٢٧٧ - ها : { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ← ح : س ← س والتمثيل الديكارتي الشكل (٢٠٧) :



الشكل (٢٠٧)

٢٧٨ – ليسا متساويين لأن مجموعة تعريف الأول ح – {١} ومجموعة تعريف الثاني ح والمجموعتان غير متساويتين .

٢٧٩ – كل من التطبيقين ١ ، ٣ متباين .

٢٨٠ – يكون التطبيق الثابت متبايناً إذا كان المنطلق مجموعة وحيدة العنصر .

٢٨١ – أية مجموعة سـ يكون التطبيق المطابق عليها متبايناً .

٢٨٢ – يكون التطبيق الثابت غامراً إذا كان المستقر مجموعة وحيدة العنصر .

٢٨٣ – يكون التطبيق الثابت غامراً ومتبايناً معاً إذا كان كل من المستقر والمنطلق مجموعة وحيدة العنصر .

٢٨٤ – التطبيق المطابق على مجموعة غامر .

٢٨٥ – $تا^{-١}$: ع ← سـ : س ← $\sqrt{س}$.

٢٨٦ – يبرهن كما في التمرين المحلول (٢٦٤) أن تا متباين وغامر والتطبيق المعاكس هو :

$$تا^{-١} : ع ← سـ : س ← \frac{س + ٣}{١ - ٢ س}$$

٢٨٧ – ١ً – (تا) غامر ومتباين ، (حا) ليس بغامر ولا متباين .

٢ً – أ – هـ ∪ هـ' = [–٣ ، ٢] ،

تا (هـ ∪ هـ') = { –٦ ، –٤ ، –٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ }

تا (هـ) ∪ تا (هـ') = { –٦ ، –٤ ، –٢ ، ٠ ، ٢ } ∪ { ٠ ، ٢ ، ٤ }

= تا (هـ ∪ هـ')

ب – حا (هـ ∪ هـ') = { ٩ ، ٤ ، ١ ، ٠ }

حا (هـ) ∪ حا (هـ') = { ٩ ، ٤ ، ١ ، ٠ ، ١ } ∪ { ٠ ، ١ ، ٤ }

حا (هـ ∪ هـ') = حا (هـ) ∪ حا (هـ')

حـ – هـ ∩ هـ' = [٠ ، ١] ، تا (هـ ∩ هـ') = { ٠ ، ٢ } ،

تا (هـ) ∩ تا (هـ') = { ٠ ، ٢ }

حا (هـ ∩ هـ') = { ٠ ، ١ } ، حا (هـ) ∩ حا (هـ') = { ٠ ، ١ ، ٤ } ،

حا (هـ ∩ هـ') ≠ حا (هـ) ∩ حا (هـ') .

٢٨٨ – ١ً – (تا) غير غامر ومتباين ، (حا) غامر وغير متباين .

٢ً – حا [تا (س)] = س وهو غامر ومتباين .

٣ً – س = ٢ ، مستحيلة ، س = ٨ ، س = ٢٦ ، أي عدد فردي.

الفصل الثامن

قدرة المجموعات
(الأعداد الأساسية)

٨٤ – تكافؤ المجموعات

Équipotence d'ensembles . Equivalence of sets

يمكن للطفل الذي قد لا يعرف العدّ بعدُ أن يدرك فيما لو أن عدد الكراسي في غرفة ما مساو لعدد الأشخاص في هذه الغرفة . يكفيه من أجل ذلك أن يجعل كل شخص في الغرفة يأخذ مكاناً له على أحد الكراسي فيكون بذلك قد كون أزواجاً يتألف كل منها من شخص وكرسي . فاذا لم يبق كرسي دون شخص جالس عليه ولم يبق شخص دون كرسي يجلس عليه فإننا نقول عندئذ ، وكما مر سابقاً ، إن هناك تقابلاً بين مجموعة الأشخاص ومجموعة الكراسي أو نقول إن المجموعتين متكافئتان.

تعريف : نقول عن مجموعة سـ إنها **مكافئة** (كمياً) لمجموعة أخرى ع إذا أمكن أن نجد تقابلاً بين المجموعتين سـ و ع ، أي إذا أمكن أن نجد تطبيقاً غامراً ومتبايناً منطلقه سـ ومستقره ع . وبلغة الرموز :

سـ ≈ ع (تقرأ سـ تكافىء ع)

عندما يوجد تطبيق : تا : سـ ⟵ ع غامر ومتباين

ويقال عن كل مجموعتين متكافئتين إن لهما **القدرة ذاتها** .

مثال (١) : إن مجموعة جميع الأعداد الصحيحة الموجبة مكافئة لمجموعة جميع الأعداد الصحيحة السالبة لأنه يمكن إيجاد تقابل بين هاتين المجموعتين كأن نقابل مثلاً بين كل عدد صحيح موجب بالعدد السالب الذي يساويه بالقيمة المطلقة .

مثال (٢) : إن المجموعة سـ = { ١، ٢، ٣ } لا تكافىء المجموعة ع = { ٢، ٣ } لأنه يستحيل علينا إيجاد تقابل بين المجموعتين .

مثال (٣) : إن المجموعة ط ، مجموعة الأعداد الطبيعية ، تكافىء المجموعة ز المكونة من الأعداد الموجبة الزوجية ، لوجود التطبيق الغامر والمتباين :

تا : ط ← ز

س ← ٢ س

فالعدد ١ من ط يقابله العدد ٢ من ز والعدد ٢ من ط يقابله العدد ٤ من ز وهكذا .

ملاحظة (١) :

إذا كان $سـ_1 \approx ع_1$ و $سـ_2 \approx ع_2$ و $سـ_1 \cap سـ_2 = ع_1 \cap ع_2 = \varnothing$ فإن $سـ_1 \cup سـ_2 \approx ع_1 \cup ع_2$ وذلك لأنه إذا كان هنالك تقابل بين $سـ_1$ و $ع_1$ وتقابل بين $سـ_2$ و $ع_2$ وحيث أنه لا يوجد أي عنصر مشترك بين $سـ_1$ و $سـ_2$ كما أنه لا يوجد أي عنصر مشترك بين $ع_1$ و $ع_2$ فإنه يوجد تقابل بين $سـ_1 \cup سـ_2$ و $ع_1 \cup ع_2$.

ملاحظة (٢) :

لا يمكن للمجموعة الخالية أن تكافىء سوى نفسها .

ملاحظة (٣) :

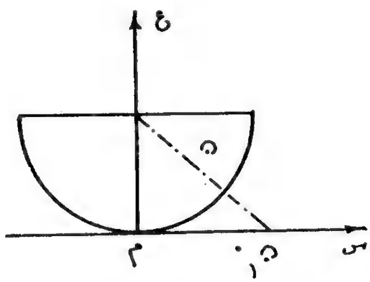
نستنتج من تعريف تكافؤ مجموعتين مباشرة أنه إذا كانت سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات فإن :

(٢) سـ ≈ ع ⇐ ع ≈ سـ .

(٣) سـ ≈ ع و ع ≈ صـ ⇐ سـ ≈ صـ .

وهكذا نرى أن التكافؤ شأنه في ذلك شأن التساوي والتشابه في الهندسة منعكس ومتناظر ومتعدي .

مثال (٤) : لتكن سـ مجموعة نقط مستقيم (نأخذه محوراً للسينات) ولتكن ع مجموعة نقط نصف الدائرة :



الشكل (٢٠٨)

س٢ + (ع − ١)٢ = ١   ع > ١

التي يقع مركزها في النقطة (٠،١) . ان طرفي نصف الدائرة أي (١،١) و (−١،١) لا ينتميان إلى ع (حيث ع > ١) .

إن سـ ≈ ع لأنه يمكن الحصول على تقابل بين مجموعة نقط سـ ومجموعة نقط ع ويكفي من أجل ذلك ان نقابل كل نقطة ن١ من المستقيم بالنقطة ن من نصف الدائرة التي تقع معها على نصف قطر واحد .

ثم إن المجموعة ع تكافىء المجموعة صـ المكونة من جميع نقط المجال المفتوح]−١ ، ١[.

صـ = { س : −١ > س > ١ }

ولبرهان هذا التكافؤ يكفي أن نسقط نقط نصف محيط الدائرة على محور السينات (اسقاطاً قائماً) ونقابل كل نقطة بمسقطها .

وأخيراً فإن سـ ≈ صـ لأن سـ ≈ ع و ع ≈ صـ .

٨٥ – المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية :

سبق لنا في الفقرة ١٦ أن قسمنا المجموعات إلى منتهية وغير منتهية. ولقد اعتمدنا في هذا التقسيم على عملية العد حيث قلنا إن المجموعة المنتهية هي تلك التي يمكن أن ننتهي من عد عناصرها وإن المجموعة غير المنتهية هي التي لا تنتهي عملية عد عناصرها .

وسنحاول في هذه الفقرة تقديم تعريف دقيق لهذين النوعين من المجموعات كما اننا سنحاول بعد ذلك أن نميز بين الأنواع المختلفة للمجموعات غير المنتهية .

اذا رجعنا للمثال (٣) من الفقرة السابقة فإننا نلاحظ أن مجموعة الأعداد الطبيعية تكافىء مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية ، التي هي مجموعة جزئية من المجموعة الأولى ، في حين أننا نلاحظ أن المجموعة س في المثال (٢) لا تكافىء المجموعة ع التي هي جزء من س .

وليس الأمر كذلك فقط بل إنه لا يمكن للمجموعة س أن تكافىء أي مجموعة جزئية منها مختلفة عنها . فهنالك فارق أساسي اذن ، بين المجموعة ط في المثال (٣) والمجموعة س في المثال (٢) ، فالأولى أمكن تكافؤها مع جزء منها مختلف عنها في حين لم يمكن ذلك في الثانية . نقول عن الأولى إنها مجموعة غير منتهية ، ونقول عن الثانية إنها مجموعة منتهية .

تعريف[١] : نقول عن مجموعة إنها غير منتهية إذا أمكن تكافؤها مع جزء منها مختلف عنها ، وإلا فإننا نقول عنها إنها منتهية .

---

(١) يعود هذا التعريف الى ريتشارد ديدكند الذي ذكره في عام ١٨٨٨ في منشوره ، ما هي الأعداد وما ينبغي أن تكون ؟

نظرية : إذا كانت ج مجموعة منتهية و $ج_1$ مجموعة جزئية منها فان $ج_1$ تكون أيضاً منتهية .

البرهان :

إذا لم تكن $ج_1$ منتهية فهي غير منتهيــة ويوجد بالتــالي مجموعة $ج_2$ جزئية من $ج_1$ ومختلفة عنها بحيث $ج_1 \approx ج_2$. وبما أن $ج - ج_1$ منفصلة عن كل من $ج_1$ و $ج_2$ فإنه يكون حسب الملاحظة (١) :

$$ج_1 \cup (ج - ج_1) \approx ج_2 \cup (ج - ج_1)$$

أي : $ج \approx ج_2 \cup (ج - ج_1)$

ولكننا نرى بسهولة أن $ج_2 \cup (ج - ج_1) \subset ج$.

اذن ج تكافىء مجموعة جزئية منها مختلفة عنها وهذا مخالف للفرض .

ينتج من هذه النظرية أنه إذا كانت $ج_1$ غير منتهية و ج تحوي $ج_1$ فان ج تكون غير منتهية ، لأنه لو كانت ج منتهية فعندئذ تكون $ج_1$ (المجموعة الجزئية منها) منتهية وهذا خلاف الفرض .

مثال (١) : إن المجموعة ج المؤلفة من عنصر واحد ب : $ج = \{ب\}$ هي مجموعة منتهية لأن ج تحوي مجموعة جزئية واحدة مختلفة عنها هي المجموعة الخالية . ومن الواضح أنه لا يمكن إيجاد تقابل بين ج والمجموعة الخالية .

والمجموعة ج المؤلفة من عنصرين ب و حـ : $ج = \{ب، حـ\}$ منتهية كذلك لأن ج تحوي ثلاث مجموعات جزئية مختلفة عنها $\{ب\}$ و $\{حـ\}$ و $\varnothing$ ولا يمكن إيجاد تقابل بين ج وبين أي من هذه المجموعات الجزئية . ومثل ذلك نرى أن كل مجموعــة تحوي عدداً محدوداً من العناصر هي مجموعــة منتهية، حتى أن المجموعة المكونة من جميع الكتب في العالم هي مجموعة منتهية.

مثال (٢) : ان مجموعة نقط مستقيم غير منتهية لأنها تكافىء ، كما مر سابقاً في المثال ٤ من الفقرة ٨٤ ، نقط القطعة] ١ ، ١ - [والتي تمثل مجموعة جزئية منها مختلفة عنها .

مثال (٣) : إذا كان $ℓ ≈$ ب وكانت $ℓ$ منتهية فإن ب منتهية .

البرهان : إذا لم تكن ب منتهية فهي غير منتهية وبالتالي يوجد مجموعة ب١ جزئية من ب ومختلفة عنها ومكافئة لها أي ب ≈ ب١ . لتكن $ℓ_١$ عناصر $ℓ$ التي تقابل عناصرها عناصر ب١ وفق التطبيق الغامر والمتباين الذي يقابل بين عناصر $ℓ$ وعناصر ب . ان $ℓ_١$ مجموعة جزئية من $ℓ$ ومختلفة عنها . لنلاحظ أن $ℓ_١ ≈$ ب١ و :

$ℓ_١ ≈$ ب١ ∧ ب١ ≈ ب ⇐ $ℓ_١ ≈$ ب

$ℓ_١ ≈$ ب ∧ ب ≈ $ℓ$ ⇐ $ℓ ≈ ℓ_١$

وبالتالي تكون المجموعة $ℓ$ غير منتهية وهذا خلاف الفرض .

٨٦ - المجموعات القابلة للعد

« Ensembles dénombrable . Denumerable sets »

> **تعريف** : نقول عن مجموعة سـ إنها قابلة للعد اذا كانت مكافئة لمجموعة الأعداد الطبيعية أي اذا كان : سـ ≈ ط

يلاحظ أن سـ غير منتهية لأن ط غير منتهية أيضاً .

ملاحظة : بالعودة إلى تعريف المتوالية الذي مرّ في الفصل السابع نستطيع القول إن المجموعة القابلة للعد هي المجموعة التي يمكن كتابتها على شكل متوالية غير منتهية (أي تلك المجموعة التي يمكن ترقيم عناصرها) .

نتيجة : نستنتج من التعريف مباشرة أن كل مجموعة مكافئة لمجموعة قابلة للعد هي مجموعة قابلة للعد . وأن كل مجموعتين قابلتين للعد متكافئتان .

مثال (١) : ان مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة قابلة للعد لأنهـا مكافئة للمجموعة ط .

مثال (٢) : إن المجموعة ج : $\{ ١ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \dots ، \frac{١}{ن} ، \dots \}$ قابلة للعد

لأن التطبيق تا : ط ← ج

$$س \leftarrow \frac{١}{س+١}$$

غامر ومتباين .

نظرية : كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد هي (على الأكثر) مجموعة قابلة للعد (أي انها إما منتهية أو قابلة للعد) .

البرهان : لتكن م مجموعة قابلة للعد فعندئذ يمكن كتابة هذه المجموعة على شكل متوالية .

$$م_١ ، م_٢ ، \dots ، م_د ، \dots \qquad (١)$$

لتكن م' مجموعة جزئية من م ولنفرض $م_{د_١}$ العنصر الأول من المتوالية (١) الذي ينتمي لـ م' وليكن $م_{د_٢}$ العنصر الثـاني وهكـذا ... فإذا رمزنا لـ $م_{د_١}$ بـ $ب_١$ ولـ $م_{د_٢}$ بـ $ب_٢$ ... فعندئذ تكون م' هي :

$$ب_١ ، ب_٢ ، \dots$$

فهي إذن منتهية أو قابلة للعد حسبما تكون هذه المتوالية منتهية أو غير منتهية .

٨٧ – المجموعات غير القابلة للعد :

إذا لم تكن المجموعة منتهية وإذا لم تكن قابلة للعد فعندئذ نسميها **مجموعة غير قابلة للعد** .

ولكن هل توجد بالفعل مجموعات ليست قابلة للعد ؟ لأنه إذا لم توجد أية مجموعة من هذا النوع فلا حاجة للبحث في مثل هذه المجموعات . ان الجواب على هذا السؤال يتضح من النظرية التالية :

نظرية : إن مجموعة الأعداد الحقيقيــة $٠ < س \leq ١$ ليست قابلة للعد .

البرهان : يكفي أن نبرهن أنه مهما كانت متوالية الأعداد الحقيقية :

$$ب_١ ، ب_٢ ، \ldots ، ب_ن ، \ldots \quad (٠ < ب_ن \leq ١)$$

فإنه يوجد عدد حقيقي $د$ ($٠ < د \leq ١$) يختلف عن جميع عناصرها. وهذا يعني أن أي محاولة لترقيم جميع الأعداد الحقيقية في المجال المفروض فاشلة.

إن طريقة البرهان التي سنذكرها الآن ، والتي تسمى طريقة كانتور ، تعتمد على الفكرة التالية :

يمكن كتابة كل عدد $٠ < س \leq ١$ على شكل كسر عشري غير منته من الشكل :

$$٠ ، س_١ س_٢ س_٣ \ldots$$

$$\text{حيث :} \quad ٠ \leq س_هـ \leq ٩ \quad (هـ = ١ ، ٢ ، ٣ ، \ldots)$$

فالعدد $\frac{١}{٢}$ مثلا يكتب بالشكل : ٠،٤٩٩٩ ... والعدد ١ يكتب

بالشكل ... ٩٩٩و٠ وتتم هذه الكتابة بشكل وحيد . وهكذا نجد أن الأعداد $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$ ، ... تكتب على شكل متوالية من تلك الكسور العشرية:

٠، $ب_{١١}$ $ب_{٢١}$ $ب_{٣١}$ $ب_{٤١}$ ...

٠، $ب_{١٢}$ $ب_{٢٢}$ $ب_{٣٢}$ $ب_{٤٢}$ ...

٠، $ب_{١٣}$ $ب_{٢٣}$ $ب_{٣٣}$ $ب_{٤٤}$ ...

٠، ....

الشكل (٢٠٧)

لنشكل الآن من العناصر القطرية في الجدول السابق العدد العشري ... $ب_{٣٣}$ $ب_{٢٢}$ $ب_{١١}$ و٠ ولنكون عدداً عشرياً جديداً نحصل عليه من العدد السابق بأن نبدل بـ $ب_{نن}$ (ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...) عدداً صحيحاً آخر $ح_{ن}$ (٠ ≦ $ح_{ن}$ ≦ ٩) يختلف عن $ب_{نن}$ نفسه فعندئذ يكون هذا العدد العشري الجديد :

$$ى = ...\ ح_{٢}\ ح_{١}\ و٠$$

محققاً الشرط ١ ≤ ى > ٠ وهو يختلف عن كل عدد $ب_{ن}$ من المتوالية المذكورة لاختلافه عنه في الرقم النوني .

نظرية : كل مجموعة مكافئة لمجموعة غير قابلة للعد هي مجموعة غير قابلة للعد كذلك .

إن برهان هذه النظرية ينتج من التعريف مباشرة .

سنبرهن في التمارين المحلولة ان]٠،١] ≈ [٠،١[، وبما أن المجموعة الأولى غير قابلة للعد فالثانية غير قابلة للعد كذلك .

نظرية : كل مجموعة غير منتهية سـ تحوي مجموعة جزئية قابلة للعد .

البرهان : لنأخذ من سـ عنصراً كيفياً $س_{١}$. فبما أن سـ مجموعة غير

منتهية فانه يوجد في $س\sim - \{س_1\}$ عنصر $س_2$ ويوجد في $س\sim - \{س_1 ، س_2\}$ عنصر ثالث $س_3$ وهكذا... نحصل بذلك على المجموعة القابلة للعد $\{س_1 ، س_2 ، س_3 ، ...\}$ الجزئية من $س\sim$ وهو المطلوب .

مثال (١) : إن مجموعة الأعداد الحقيقية المنتمية إلى المجال المغلق [ب،ح] هي مجموعة غير قابلة للعد. ذلك لأن التطبيق تا(س)=ب+(ح-ب)س الغامر والمتباين يقابل بين المجال [٠ ، ١] والمجال [ب ، ح] ، فمجموعتا الأعداد الحقيقية المفروضتان متكافئتان . وحيث أن الأولى غير قابلة للعد فالثانية غير قابلة للعد كذلك .

نسمي المجال [٠،١] المستمر Continuum ، Continu

وسنلاحظ في التمارين المحلولة أن جميع المستقيمات وأنصاف المستقيمات، إذا نظرنا اليها كمجموعات نقط متكافئة فيما بينها ومكافئة للمستمر .

ولنطرح الآن السؤال التالي :

لاحظنا فيما سبق أن المجموعة المنتهية لا تكافىء أي مجموعة جزئية منها مختلفة عنها وأن كل مجموعة جزئية من مجموعة منتهية هي كذلك مجموعة منتهية . ورأينا بعد ذلك أن المجموعة القابلة للعد تكافىء جزءاً منها (شأنها في ذلك شأن كل مجموعة غير منتهية) وأن المجموعات الجزئية لمجموعة قابلة للعد قد تكون قابلة للعد وقد تكون منتهية . ثم صادفنا بعد ذلك مجموعات ليست منتهية وليست قابلة للعد ، كمجموعة الأعداد الحقيقية في المجال المغلق [٠،١] والتي دعوناها المستمر . ويمكننا بسهولة أن نرى أن المجموعات الجزئية للمستمر (وللمجموعات المكافئة له) قد تكون مكافئة للمستمر وقد تكون قابلة للعد (كأن نختار في المجال [٠،١] المتتالية $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ... التي تنتمي جميع عناصرها إلى

المجال المذكور وهي بجد ذاتها مجموعة قابلة للعد ، أو منتهية (كأن نأخذ العددين $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ كمجموعة جزئية من المستمر) .

والسؤال المطروح الآن : هل هنالك خطوة أخرى بعد هذه الخطوة؟ أي : هل توجد مجموعات غير منتهية وغير قابلة للعد ولا تكافىء المستمر ؟ إن الجواب على هذا السؤال بالإيجاب . فمجموعة التطبيقات الحقيقية المعرفة على المجال [٠،١] والتي تأخذ قيمها في مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة من النوع المذكور . وقبل البرهان نذكّر بأنه يكفي كي يكون تطبيق مفروض مختلفاً عن تطبيق آخر معرّف على المنطلق ذاته أن يختلفا في قيمتيهما عند عنصر واحد على الأقل من المنطلق .

ولبرهان النظرية نفرض أن ادعاءنا غير صحيح وأن التطبيقات المشار اليها مكافئة للمستمر وهذا يعني أنه يوجد تقابل بين المجال [٠،١] وبين مجموعة التطبيقات المذكورة ، فكل قيمة ب من المجال المذكور تقابل تطبيقاً واحداً نرمز له بـ $تا_{ب}$ (س) . لنكوّن الآن تطبيقاً جديداً حا (س) معرّفاً على المجال $٠ \leq س \leq ١$ بحيث يكون $حا(ب) \neq تا_{ب}(ب)$ من أجل كل قيمة ب من المجال المذكور (وهذا ممكن لأن المستقر يتكون من مجموعة الأعداد الحقيقية) . فالتطبيق حا (س) لا يطابق أي تطبيق $تا_{ب}$ (س) لأن $تا_{ب}(س) \neq حا(س)$ من أجل س = ب على الأقل . وبما أن حا (س) أحد التطبيقات المعرفة على المجال [٠،١] ويأخذ قيمه في المستقر المذكور فإنه يجب أن يطابق أحد التطبيقات $تا_{ب}$ (س) . أي يجب أن يكون $تا_{ب}(ب) = حا(ب)$ وهذا غير صحيح حسب تعريف حا (ب) وهو المطلوب .

٨٨ – العدد الاساسي « Nombre Cardinal . Cardinal number » :

عندما أدخل الانسان مفهوم العدد العادي انطلق من شكل ابتدائي يعتمد على تجزئة الصحيح إلى عدد معين من الأجزاء ، ولكن إذا أردنا الحصول على تعريف دقيق للعدد العادي علينا أن نقلع عن هذا الشكل ونسلك السبيل التالي :

ننظر للعدد العادي على أنــه زوج من الأعداد الطبيعية ب و حـ كتبه ، وفق ما اعتدنا وألفنا ، بالشكل $\frac{ب}{حـ}$. ولكن حتى هذه النظرية لا تزيل كل لبس في هذا المفهوم الجديد فجميع الأزواج العددية $\frac{ب}{حـ}$ ، $\frac{٢ ب}{٢ حـ}$ ، $\frac{٣ ب}{٣ حـ}$ ، ... ليست إلا أشكالاً مختلفة للعدد العادي ذاته .

ولذلك فإنه علينا أن ننظر (أولاً) إلى كل زوجين عدديين من الشكل $\frac{ن . ب}{ن . حـ}$ و $\frac{ك . ب}{ك . حـ}$ على أنهما متكافئان ، وأن نعتبر (ثانياً) أن العدد العادي هو ممثل كيفي نختاره من بين الأزواج العددية المتكافئة ، وأن نتحقق (ثالثاً) عند استخراج قواعد الحساب في الأعداد العادية أن قاعدة الحساب لا تتعلق بالممثل الذي اخترناه (بعبارة أخرى : منسجمة مع التكافؤ المذكور) .

مثل ذلك يتم في حالة المجموعات المتكافئة . فاذا نظرنا ، على سبيل المثال ، في المجموعات المتكافئة :

{ انسان ، قلم ، كتاب } ، { ١ ، ٢ ، ٣ } ، { مدرسة ، صف ، مقعد } ، { الأرض ، القمر ، المشتري } .

وفي جميع المجموعات المكافئة لها ، وإذا اخترنا إحدى هذه المجموعات ،

المجموعة {١ ، ٢ ، ٣} مثلاً ، كممثل لجميع هذه المجموعات المتكافئة فاننا نطلق عادة على هذه المجموعة التي اخترناها اسم **العدد الاساسي للمجموعات المذكورة أو (قدرة) هذه المجموعات .**

> **تعريف :** العدد الأساسي[١] أو (القدرة) مـ لمجموعة هو ممثـل كيفي سـ نختاره من بين جميع المجموعات المكافئة لهذه المجموعة .

وقد نرمز لقدرة المجموعة سـ بالشكل |سـ| على أن لا يغرب عن البال أنه يمكن أن نبدل بالمجموعة سـ أية مجموعة مكافئة لها أي أن :

|سـ| = |ع| لما سـ ≈ ع

ومهما يكن هذا التعريف مجرّداً إلا أنه يبدو في حـالة المجموعـات المنتهية لا غرابة فيه ، ذلك أنه لمعرفة عدد عناصر مجموعة منتهية نقوم بعملية عدّ لعناصرها فنحصل بهذا على العدد ٤ عند عملية العد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ الأمر الذي يجعلنا نعتبر العدد ٤ ممثلا بالمجموعة {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}.

وهكذا فإن العدد الأساسي لمجموعة منتهية هو عـدد عناصر هـذه المجموعة ن ، ونرمز له كذلك بالرمز ن ذاته .

أما في حالة المجموعات غير المنتهية فإننا لا نعرف إلا عدداً بسيطاً من أصناف المجموعات المتكافئة ، ألا وهي المجموعات القابلة للعد ، التي

---

(١) يعرف كانتور العدد الأساسي لمجموعة بأنه ذلك المفهوم الذي يدرك بقوة التجريد والذي نلحقه بمجموعةمتجاهلين طبيعة عناصرها والترتيب الذي تحتله هذه العناصر . فالعدد الأساسي هو ما تشترك به المجموعات المتكافئة فيما بينها .

ويذهب بعض المؤلفين إلى اعتبار العدد الأساسي مـ لمجموعة سـ هو جماعـة جميـع المجموعات المكافئة للمجموعة سـ .

يمكن اعتبارها ممثلة بالمجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } ، والمجموعات المكافئة للمستمر والمجموعات المكافئة لمجموعة التطبيقات المعرّفة في المجال [٠، ١] . فاذا رمزنا للأعداد الأساسية لهذه الأصناف بـ م. ، ر. ، ا. على الترتيب فاننا لا نكون بذلك قد عرفنا ، حتى الآن، سوى الأعداد الأساسية :

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، م. ، ر. ، ا.

٨٩ – مقارنة الاعداد الاساسية :

> **تعريف :** إذا كانت لدينا مجموعتان س و ع وإذا كانت س مكافئة لمجموعة جزئية من ع ولكن ع لا تكافىء أية مجموعة جزئية من س فاننا نقول إن س ذات قدرة أقل (أو ذات عدد أساسي أصغر) من المجموعة ع ونكتب ذلك بالشكل :
>
> | س | < | ع |

ولكي يكون لهذا التعريف معنى علينا أن نبرهن أن العلاقة الأخيرة صحيحة عندما نستبدل بكل من س و ع مجموعة مكافئة لها . لنفرض من أجل ذلك أن س ≈ س′ و ع ≈ ع′ ولنفرض س ≈ ع١ حيث ع١ مجموعة جزئية من ع ولكن ع لا تكافىء أية مجموعة جزئية من س . فبما أن ع ≈ ع′ فانه يوجد تقابل بين ع و ع′ ونجد في هذا التقابل أن ع١ تقابل مجموعة جزئية ع′١ من ع′ أي أن ع′١ ≈ ع١ ≈ س ≈ س′ وبالتالي س′ ≈ ع′١ أي أن س′ تكافىء مجموعة جزئية من ع′ . بقي أن نبرهن أن ع′ لا تكافىء مجموعة جزئية من س′ . لنفرض مؤقتاً أن ع′ تكافىء مجموعة جزئية من س′ فعندئذ نجد وفق الطريقة السابقة أن ع تكافىء مجموعة جزئية من س وهذا ما يناقض ما فرضناه وهو المطلوب .

من الواضح أن التعريف السابق يعطي في حالة الأعداد الأساسية المحدودة المفهوم المعروف « عدد أصغر من عدد آخر » .

يُبرهن أن كل عددين أساسيين مـ و مـ١ قابلان للمقارنة مع بعضهما أي أنه إما أن يكون مـ < مـ١ أو مـ = مـ١ أو مـ > مـ١ . بعبارة أخرى : إن أية مجموعة كيفية من الأعداد الأساسية قابلة للترتيب حسب كبرها .

ملاحظة : أشرنا قبل قليل الى أن التعريف الأخير لا يعطي شيئاً جديداً إذا ما طبق على الأعداد الأساسية المحدودة . أما إذا انتقلنا إلى الأعداد الأساسية للمجموعات غير المنتهية ، هذه الأعداد التي نسميها عادة الأعداد غير المحدودة (أو ما وراء النهائية Transfinite cardinal numbers) فاننا نجد الحقائق التالية :

(١) إذا كان مـ عدداً أساسياً غير محدود ومـ١ عدداً أساسياً محدوداً فعندئذ يكون مـ١ < مـ لأنه اذا كانت سـ مجموعة ممثلة لـ مـ (وهي مجموعة غير منتهية) و ع مجموعة ممثلة لـ مـ١ (وهي مجموعة منتهية) فعندئذ يوجد في سـ مجموعة جزئية مكافئة لـ ع ولا يوجد في ع مجموعة جزئية مكافئة لـ سـ .

(٢) مهما كان العدد الأساسي غير المحدود مـ فان مـ ≥ م. ، أي أن العدد م. أصغر الأعداد الأساسية غير المحدودة .

يكفي لبرهان ذلك أن نلاحظ أن كل مجموعة غير منتهية تحوي مجموعة قابلة للعد حسبما رأينا سابقاً .

(٣) بما أن م. ≤ ر. و م. ≠ ر. فانه يكون م. < ر.

(٤) إن ر. > م.

ولبرهان ذلك نلاحظ أنه اذا رمزنا بـ ر للمستمر وبـ ع لمجموعة

التطبيقات الحقيقية المعرفة في المجال [١،٠] فان ر تكافيء مجموعة جزئية من ع وذلك لأن مجموعة التطبيقات الثابتة والتي يساوي كل منها عدداً معيناً ى من المجال [١،٠] هي مجموعة جزئية من ع ومكافئة لـ ر. ثم إن ع لا تكافيء مجموعة جزئية من ر كما رأينا سابقاً وهو المطلوب.

ملاحظة : لم نتعرف حتى الآن إلا على ثلاثة أعداد أساسية غير محدودة . ترى هل توجد أعداد أخرى من هذا النوع ؟ نعم فهنالك عدد غير منته من الأعداد الأساسية غير المحدودة ، وهذا ينتج من الحقيقة التالية وهي أنه يوجد من أجل كل عدد أساسي عدد أساسي أكبر منه . وتفصيل ذلك نجده في النظرية التالية :

> **نظرية** : إن العدد الأساسي لمجموعة أجزاء مجموعة أكبر من العدد الأساسي للمجموعة نفسها .

البرهان : إن برهان هذه النظرية يبدو واضحاً في حالة المجموعات المنتهية . فمجموعة أجزاء المجموعة الخالية ∅ هي { ∅ } ، وهي مجموعة مكونة من عنصر واحد ، ويوافق المجموعة الخالية العدد الاساسي (٠) في حين يوافق المجموعة المكونة من عنصر واحد العدد الاساسي ١ . ومجموعة أجزاء المجموعة {ب} المكونة من عنصر واحد هي { {ب} ، ∅ } ويوافقها العدد الاساسي ٢ ونعلم أن ٢ > ١ . وبشكل عام رأينا في التمرين المحلول رقم ٤٠ أن عدد أجزاء مجموعة تحوي ن عنصراً هو ٢ن ومن السهل أن نبرهن أن ن > ٢ن .

أما في حالة المجموعات غير المنتهية فاننا سنسوق البرهان التالي الذي يشمل كذلك الحالة السابقة ، حالة المجموعات المنتهية ، لنرمز بـ سـ = سـ (س) لمجموعة عناصرها س ولنرمز بـ سـ ({ س })

للمجموعة التي تنتج عن سـ (س) بأن نبدل بكل س المجموعة {س} فتكون هذه المجموعة مكافئة لـ سـ . ولنرمز بـ ج (سـ) لمجموعة أجزاء سـ . من الواضح أن {س} ⊇ سـ ولذلك فان :

سـ ({س}) ⊇ ج (سـ)

وبالتالي فان سـ مكافئة لمجموعة جزئية من ج (سـ) . يكفي أن نبرهن أن ج (سـ) لا تكافىء أية مجموعة جزئية من سـ .

ليكن ج. ⊇ ج (سـ) ، سـ. ⊇ سـ

فاذا برهنا أن :

ج. ≈ سـ. ⇐ ج. ⊃ ج (سـ) (*)

فعندئذ لا يمكن لـ ج (سـ) أن تكافىء أية مجموعة جزئية من سـ لأنه طالما يصح الاقتضاء (*) من أجل أية مجموعة محتواة في نفسها بالمعنى الواسع فهو يصح من أجل ج نفسها وبالتالي ينتج :

ج ≈ سـ. ⊇ سـ ⇐ ج ⊃ ج (سـ)

وهذا غير ممكن ، فالمجموعة لا يمكن أن تكون محتواة تماماً في نفسها). وهكذا نجد أن المسألة تؤول إلى برهان الاقتضاء (*) .

بما أن سـ. ≈ ج. فانه يوجد تقابل بين سـ. و ج. . لنرمز لهذا التقابل بالرمز حا :

حا : سـ. ← ج.

س ← حـ

وحيث أن كل عنصر حـ من ج. هو جزء من سـ فاما أن ينتمي س المقابل لهـــذا العنصر (وفق حا) إلى حـ نفسه أو أن لا ينتمي .

لتكن حـ' المجموعة المكونة من كل عنصر س ∋ سـ. ولا ينتمي إلى المجموعة حـ المقابلة له وفق حا .

ان هذه المجموعة حـ' ، والتي هي مجموعة جزئية (قد تكون خالية)

من س. ليست عنصراً من ع. لأنـــه لو كانت ح' عنصراً من ع. فعندئذ يلزم أن يقابل ح' عنصر س من س. وفق حا . وهنا نكون أمام أحد احتمالين . اما أن يكون س' ∋ ح' وهذا غير ممكن (حسب تعريف ح') أو أن يكون س' ∌ ح' وهذا غير ممكن كذلـك ، لأن العنصر س' باعتباره لا ينتمي إلى العنصر المقابل له وفق حا ، فانه يلزم أن ينتمي لـ ح' وفي هذا تناقض . وهكذا نرى أن ح' ∌ ع. وبالتالي ع. ⊃ ع (س) وهو المطلوب .

نظرية برن شتاين Bernstein في التكافؤ (مقارنة القدرات) :

إذا كان لدينا مجموعتان س و ع فإنـــه لا يرد منطقياً عند دراسة التقابل بين هاتين المجموعتين ، سوى الحالات الأربع التالية :

(١) يوجد تقابل بين س و ع وعندئذ يكون س ≈ ع .

(٢) يوجد تقابل بين إحدى مجموعتين (مثل س) ومجموعة جزئية من الثانية ومختلفة عنها ، دون أن يكون العكس ممكناً أي لا يوجد تقابل بين ع وأية مجموعة جزئية من س مختلفة عنها .

(٣) يوجد تقابل بين كل من المجموعتين ومجموعة جزئية من الثانية مختلفة عنها .

(٤) لا يوجد أي تقابل بين أي من المجموعتين ومجموعة جزئية من الثانية مختلفة عنها .

من الواضح أن الحالتين الثالثة والرابعة غير ممكنتين في حالة المجموعات المنتهية فإما أن تصح الحالة الأولى (عندما يكون للمجموعتـين عـدد واحد من العناصر) أو أن تصح الحالة الثانية .

ويبرهن (بالاعتماد على مبدأ من مبادىء نظرية المجموعات يسمى مبدأ

الاختيار) أن الحالة الرابعة كذلك غير ممكنة في حالة المجموعات غير المنتهية .

أما بالنسبة للحالة الثالثة فقد تصح في حالة المجموعات غير المنتهية ، غير أنه في كل مرة تصح فيها هذه الحالة تصح الحالة الأولى كذلك كما يبدو من النظرية الآتية :

نظرية التكافؤ : إذا كانت كل من مجموعتين مكافئة لمجموعة جزئية من الثانية فعندئذ تكون هاتان المجموعتان متكافئتين .

لبرهان هذه النظرية انظر التمرين المحلول (٣٠١) .

٩٠ - جمع عددين أساسيين :

إذا سئل طفل عن مجموع ثلاث كرات مع خمس كرات فإنه يوحّد بين المجموعتين في مجموعة واحدة ثم يعد عناصر المجموعة الجديدة . إن ما قام به الطفل لا يمكن اعتماده بحذافيره عندما تكون المجموعتان مجردتين ، فكل من المجموعتين { ١ ، ٢ ، ٣ } و { ١ ، ٢ ، ٤ } يحوي ثلاثة عناصر غير أن مجموعة الاجتماع { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } تحوي أربعة عناصر فقط ، فهذه الطريقه لا تصلح إذن لجمع ٣ و ٣ . غير أننا إذا حرصنا على أن تكون المجموعات الممثلة منفصلة فعندئذ يمكن اعتماد ما قام به الطفل تماماً.

وعلى هذا إذا أردنا أن نجمع عددين أساسيين م و م$_{١}$ نختار مجموعتين ممثلتين منفصلتين ج و ج$_{١}$ ثم نوجد اجتماع هاتين المجموعتين مج = ج ∪ ج$_{١}$ ويكون :

$$م + م_{١} = |مج|$$

ولكي يكون لهذا التعريف معنى علينا أن نتحقق من ان العدد الأساسي |مج| لا يتأثر إذا استبدلنا بالمجموعتين ج و ج$_{١}$ مجموعتين

مكافئتين لهما على الترتيب ج′ و ج١′ على أن تكون هاتان المجموعتان منفصلتين كذلك .

وبالحقيقة لما كان ج ≈ ج′ و ج١ ≈ ج١′ فانه يكون حسب الملاحظة (١) من الفقرة (٨٤) .

$$ج \cup ج_1 \approx ج' \cup ج_1'$$ وهو المطلوب .

يمكن أن نبرهن بسهولة (انظر التمارين المحلولة) :

(أ) $م + م_1 = م_1 + م$

(ب) $(م + م_1) + م_2 = م + (م_1 + م_2)$

(حـ) إذا كان $م_1 \leqq ن_1$ ، $م_2 \leqq ن_2$ فعندئذ يكون :

$$م_1 + م_2 \leqq ن_1 + ن_2$$

(د) $\aleph_0 + ن = \aleph_0$ ، $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

(حيث ن عدد أساسي محدود) .

(هـ) $ر_0 + ن = ر_0$ ، $ر_0 + \aleph_0 = ر_0$ ، $ر_0 + ر_0 = ر_0$

(حيث ن عدد أساسي محدود) .

(و) إذا كان م عدداً غير محدود فعندئذ يكون : $م + \aleph_0 = م$

ملاحظة : يمكن تعريف عملية الجمع لأكثر من عددين أساسيين وفق ما يلي : إذا كانت $م_1$ ، ... ، $م_ك$ أعداداً أساسية و $ج_1$ ، ... ، $ج_ك$ مجموعات منفصلة ممثلة لها فان :

$$م_1 + م_2 + \dots + م_ك = \left| ج_1 \cup ج_2 \cup \dots \cup ج_ك \right|$$

ويبرهن أن :

$$(م_1 + م_2) + م_3 = م_1 + م_2 + م_3$$

٩١ – ضرب عددين أساسيين :

ليكن م و $\text{م}_١$ عددين أساسيين و ج و ج١ مجموعتين (منفصلتين أو غير منفصلتين) ممثلتين لهذين العددين . نسمي العدد الأساسي للجداء الديكارتي للمجموعتين ج و ج١ حاصل ضرب م و م١ أي :

$$\text{م} \times \text{م}_١ = |\text{ج} \times \text{ج}_١|$$

وإذا كانت ج′ و ج′١ مجموعتين بحيث ج′ ≈ ج و ج′١ ≈ ج١ فعندئذ يكون (كما يمكن للقارىء أن يبرهن ذلك بسهولة) :

$$\text{ج} \times \text{ج}_١ \approx \text{ج}' \times \text{ج}'_١$$

وحاصل الضرب بالتالي مستقل عن المجموعتين الممثلتين للعددين م و م١ .

هذا ويمكن أن نذكر تعريف ضرب عددين أساسيين بالشكل التالي:

لنفرض أن العددين الأساسيين م > ٠ ، ى > ٠ ممثلان بمجموعتين س و ع (لا يشترط في هاتين المجموعتين أن تكونا منفصلتين) ولنكون المجموعة ر من جميع الأزواج المرتبة (س ، ع) حيث س ∈ س و ع ∈ ع فعندئذ يكون م . ى = | ر | . أما إذا كان أحد العددين م أو ى يساوي الصفر فإن م . ى = ٠

يبرهن بسهولة (انظر التمارين المحلولة) :

(أ) $\text{م} \times \text{م}_١ = \text{م}_١ \times \text{م}$

(ب) $(\text{م} \times \text{م}_١) \times \text{م}_٢ = \text{م} \times (\text{م}_١ \times \text{م}_٢)$

(ح) $(\text{م} + \text{م}_١)\,\text{م}_٢ = \text{م}\,\text{م}_٢ + \text{م}_١\,\text{م}_٢$

(ى) اذا كان $\text{م}_١ \geqq \text{ن}_١$ و $\text{م}_٢ \geqq \text{ن}_٢$ فعندئذ يكون :

$$\text{م}_١\,\text{م}_٢ \geqq \text{ن}_١\,\text{ن}_٢$$

(هـ) $ن \times م_{٠} = م_{٠}$ (ن عدد أساسي محدود $\neq$ ٠)

(و) $م_{٠} \times م_{٠} = م_{٠}$

(ز) $ن \times ر_{٠} = ر_{٠}$ (ن عدد أساسي محدود $\neq$ ٠)

(ح) $ر_{٠} \times ر_{٠} = ر_{٠}$

ملاحظة : يمكن تعريف عملية الضرب لأكثر من عددين أساسيين وفق ما يلي : إذا كانت $م_{١}$ ، ... ، $م_{ك}$ أعداداً أساسية و $ج_{١}$ ، ... ، $ج_{ك}$ مجموعات ممثلة لها على الترتيب فإن :

$$م_{١} \times \dots \times م_{ك} = |ج_{١} \times \dots \times ج_{ك}|$$

★ ★

تمارين محلولة

٢٨٩ – برهن أنه مهما كانت المجموعات سـ و ع و صـ فإن :

١ – سـ × ع ≈ ع × سـ

٢ – (سـ × ع) × صـ ≈ سـ × ع × صـ

الحل :

١ – إذا استطعنا أن نجد تطبيقاً غامراً ومتبايناً معرّفاً على سـ × ع ويأخذ قيمه في ع × سـ نحصل على المطلوب .

إن التطبيق :

تا : (س،ع) ⟵ (ع،س) س ∈ سـ و ع ∈ ع

المعرّف على سـ × ع والذي يأخذ قيمه في ع × سـ غامر ومتباين وهو المطلوب .

٢ – إن التطبيق :

تا : (سـ × ع) × صـ ⟵ سـ × ع × صـ

((س ، ع) ، ص) ⟵ (س ، ع ، ص)

(س ∈ سـ ، ع ∈ ع ، ص ∈ صـ)

غامر ومتباين وهو المطلوب .

٢٩٠ – برهن : [١،٠] ≈ [١،٠ [≈] ١،٠] ≈] ١،٠ [

الحل :

أ – إن [١،٠] ≈ [١،٠ [لأن التطبيق :

$$\text{تا}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{لما } \text{س} = 0 \\ \frac{1}{\text{ن}+2} & \text{لما } \text{س} = \frac{1}{\text{ن}} \text{ حيث } \text{ن} \in \text{ط}^* \\ \text{س} & \text{لما } \text{س} \neq 0 ، \frac{1}{\text{ن}} \text{ حيث } \text{ن} \in \text{ط}^* \end{cases}$$

المعرّف على [٠،١] والذي يأخذ قيمه في] ٠،١ [غامر ومتباين.

واستناداً إلى هذا التابع يكون :

$$0 \leftarrow \frac{1}{2} ، 1 \leftarrow \frac{1}{3} ، \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{4} ، \ldots$$

$$\text{س} \leftarrow \text{س} \quad \text{عندما س} \neq 0 ، \frac{1}{\text{ن}}$$

ب – [٠،١] ≈ [٠،١ [

إن التطبيق :

$$\text{تا}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{1}{\text{ن}+1} & \text{لما } \text{س} = \frac{1}{\text{ن}} \\ \text{س} & \text{لما } \text{س} \neq \frac{1}{\text{ن}} \end{cases} \quad \text{ن} \in \text{ط}^*$$

المعرف على [٠،١] ويأخذ قيمه في [٠،١ [غامر ومتباين .

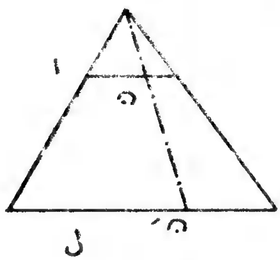
٣ – [٠،١ [≈] ٠،١]

إن التطبيق تا (س) = ١ – س المعرف على [٠،١ [والذي يأخذ قيمه في] ٠،١] غامر ومتباين وهو المطلوب .

٢٩١ – برهن أن أي مجال محدود مغلق (ل) من المحور الحقيقي ، على أن ننظر اليه كمجموعة نقط يكافىء المستمر .

الحـل :

يكفي من أجل ذلك أن نرسم المجال المفروض ونرسم القطعة [١،٠] من المحور الحقيقي كما في الشكل (٢٠٨) ونقابل كل نقطة من المستمر بالنقطة التي تقع معها على استقامة واحدة مـــارة بالنقطة م (نقطة تقاطع المستقيمين اللذين يصلان طرفي المجال بطرفي المستمر) .



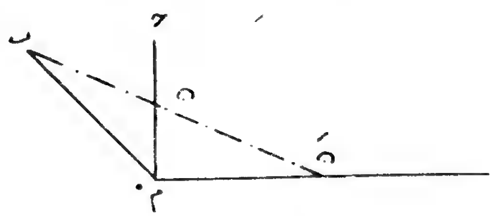
الشكل (٢٠٨)

نستنتج مما ذكر ومن خاصة التعدي أن أي مجالين محدودين متكافئان .

٢٩٢ – برهن أن نصف المستقيم يكافىء [١،٠] .

الحـل :

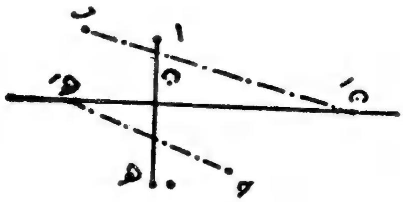
إن الشكل (٢٠٩) يوضح كيف يمكن الحصول على تقابل بين م ح=[١،٠ [



الشكل (٢٠٩)

ونصف المستقيم (يلاحظ أن ب ح // نصف المستقيم وأن ب لا تقع في الجهة التي يقع فيها نصف المستقيم بالنسبة للقطعة م ح وأنه باستثناء ذلك لا تخضع ب لأي شرط) .

٢٩٢ – برهن أن المستقيم يكافيء (٠١) .



الحل :

إن الشكل (٢١٠) يوضح المطلوب .

الشكل (٢١٠)

٢٩٣ – برهن أن مجموعة الأعداد الأولية قابلة للعد .

الحل :

لنبرهن أولاً أن هذه المجموعة غير منتهية . لنفرض مؤقتاً أنها منتهية ولنفرض أن ل أكبر عدد أولي ، عندئذ تكون مجموعة الأعداد الأولية (مرتبة حسب كبرها) هي :

{ ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، .... ، ل }   (١)

لنشكل العدد :

ء = (٢ × ٣ × ٥ × ٧ × ... × ل) + ١

فإما أن يكون هذا العدد أولياً (وهذا يناقض فرضنا أن ل أكبر الأعداد الأولية) أو أن يكون غير أولي وعندئذ يقبل القسمة على عدد أولي واحد على الأقل مثل $ل_1$. ولكن لا يمكن لـ $ل_1$ أن يكون من الأعداد الأولية ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، ل لأن ء لا يقبل القسمة على أي منها (باقي القسمة يساوي الواحد) . وهذا يدلنا على أن $ل_1$ لا ينتمي للمجموعة (١) وهذا يناقض ما افترضناه كذلك من أن المجموعة (١) تحوي جميع الأعداد الأولية ، فالمجموعة غير منتهية .

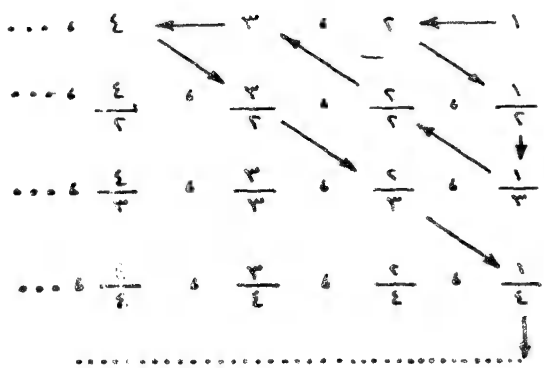
وبما أنه يمكن وضع الأعداد الأولية في متوالية (بترتيب الأعداد الأولية وفق كبرها) فانها تشكل مجموعة قابلة للعد . أو بشكل آخر ، لما كانت مجموعة الأعداد الأولية هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد

الطبيعية القابلة للعد فانها ، حسب نظرية سابقة ، قابلة للعد (على الأكثر) وحيث أنها ليست منتهية فهي قابلة للعد حتماً وهو المطلوب .

٢٩٤ – برهن أن مجموعة الأعداد العادية الموجبة قابلة للعد .

الحل :

لنشكل جدولاً على النحو التالي : نضع في السطر الأول جميع الأعداد العادية التي مخرجها ١ (الأعداد الطبيعية) مرتبة حسب كبرها ، ثم نكتب في سطر ثان جميع الأعداد العادية التي مخرجها ٢ مرتبة حسب كبرهـا كذلك وهكذا ... فنجد :



الشكل (٢١١)

لنرتب بعد ذلك الأعداد العادية (وفق الخط المرسوم) في متوالية على أن نتجاوز كل عدد سبق أن مرّ مكافىء له فنجد :

$$1 ، 2 ، \frac{1}{2} ، \frac{1}{3} ، 3 ، 4 ، \frac{3}{2} ، \frac{2}{3} ، \frac{1}{4} ، \ldots$$

ففي هذه المتوالية يمر كل عدد عادي موجب مرة واحدة فقط وهو المطلوب .

٢٩٥ - هل المجموعة :

ف = { (س ، ع ، ص) : ($س^2 + ع^2 = ص^2$) ∧ (س ، ع ، ص ∈ ط*) }

المعروفة بمجموعة ثلاثيات فيثاغورث ، قابلة للعد ؟

الحل :

من الواضح أنه يلزم ويكفي لتكون الثلاثية المرتبة (س ، ع ، ص) ثلاثية فيثاغورث أن يوجد مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه س و ع و ص على الترتيب . ومن ثلاثيات فيثاغورث الشهيرة نعلم ، على سبيل المثال ، الثلاثيات (٣ ، ٤ ، ٥) و (٦ ، ٨ ، ١٠) و (٥ ، ١٢ ، ١٣) .

وإذا كانت (س ، ع ، ص) ثلاثية فيثاغورث فان (ى س ، ى ع ، ى ص) ، حيث ى عدد صحيح موجب ، ثلاثية فيثاغورث أيضاً . وبالعكس إذا كانت (س ، ع ، ص) ثلاثية فيثاغورث وكان ى عاملا مشتركاً بين س و ع فانه يجب أن يكون ى عاملا لـ ص . وإذا كتبنا $س = ى س_1$ ، $ع = ى ع_1$ ، $ص = ى ص_1$ فعندئذ يكون :

$$(ى س_1)^2 + (ى ع_1)^2 = (ى ص_1)^2$$

ومنه نجد أن ($س_1$ ، $ع_1$ ، $ص_1$) ثلاثية فيثاغورث أيضاً . نسمي كل ثلاثية فيثاغورث (أ ، ب ، حـ) ثلاثية فيثاغورث الأولية عندما لا يوجد عامل مشترك بين أ و ب و حـ . ومن الواضح عندئذ أن كل ثلاثية فيثاغورث تكتب بالشكل (ى $أ_1$ ، ى $ب_1$ ، ى $حـ_1$) حيث ($أ_1$ ، $ب_1$ ، $حـ_1$) أولية و ى عدد صحيح موجب .

سنبرهن أولاً أن ثلاثيات فيثاغورث الأولية قابلة للعد .

لتكن (س ، ع ، ص) ثلاثية أولية . من الواضح أنه لا يمكن أن يوجد عامل مشترك بين أي اثنين من الأعداد الطبيعية س و ع و ص وإلا لكان هذا العامل ، باعتبار $س^2 + ع^2 = ص^2$ ، عاملا مشتركاً

بين الأعداد الثلاثة . من هذا ينتج أنه لا يمكن لـ س و ع أن يكونا زوجيين معاً .

كذلك لا يمكن لـ س و ع أن يكونا فرديين معاً لأنه لو كانا فرديين معاً لاستطعنا أن نكتب :

س = ٢د + ١   ع = ٢هـ + ١   (د ، هـ ∋ ط)

ويكون :

ص^{٢} = (٢د + ١)^{٢} + (٢هـ+١)^{٢} = ٢ (٢د^{٢} + ٢هـ^{٢} + ٢د + ٢هـ+١)

ومنه يتبين أن ص^{٢} قابل للقسمة على ٢ وبالتالي يكون ص زوجياً ، أي أن ص^{٢} قابل للقسمة على ٤ . وبالتالي يكون المقدار :

٢د^{٢} + ٢هـ^{٢} + ٢د + ٢هـ + ١   زوجياً وهذا غير ممكن .

لنبرهن بعد ذلك أنه إذا كانت (س ، ع ، ص) ثلاثية أولية ، واذا كان ع زوجياً فإن :

س = ك^{٢} − ل^{٢} ع = ٢ ك ل   ص = ك^{٢} + ل^{٢}

حيث ك و ل عددان صحيحان موجبان يحققان الشروط التالية :

(١) ك و ل أوليان فيما بينهما .   (٢) ك > ل

(٣) أحد العددين ك و ل فردي والآخر زوجي .

وبالعكس إذا كان ك و ل عددين صحيحين موجبين محققين للشروط الثلاثة فإن (س ، ع ، ص) ثلاثية أولية .

لبرهان القسم الأول نلاحظ أن كلاً من س و ص فردي (لأن ع زوجي) وبالتالي يكون كل من ص + س و ص − س زوجياً ، أي انه يوجد عددان ب و حـ بحيث يكون :

ص + س = ٢ ب   ص − س = ٢ حـ

إن العددين ب و حـ أوليان فيما بينهما لأنه إذا وجد عامل مشترك بينهما

فعندئذ يكون لـ ص و س عامل مشترك ، الأمر الذي يتنافى مع كون س و ص أوليين . وحيث أن $ع^٢ = ص^٢ - س^٢$ فان :

$$ع^٢ = ٤ ب حـ$$

ولما كان ع زوجياً فإنه يوجد عدد ز بحيث يكون ع = ٢ ز ومنه :

$$ز^٢ = ب حـ$$

وبما أن ب و حـ أوليان فإنه يلزم أن يكون كل منهما مربع كامل ، أي أنه يوجد عددان صحيحان موجبان ك و ل أوليان فيما بينهما بحيث يكون :

$$ب = ك^٢ \qquad حـ = ل^٢$$

وبالتالي نجد :

$$س = ك^٢ - ل^٢ \quad ، \quad ع = ٢ ك ل \quad ، \quad ص = ك^٢ + ل^٢ \qquad (*)$$

من الواضح أن ك > ل لأن س > ٠ كما أن أحد العددين ك و ل فردي والآخر زوجي ، لأنه لو كانا زوجيين لما كانا أوليين كما أنه لو كانا فرديين لكان كل من س و ص زوجياً وهذا يتنافى مع الفرض .

لبرهان القسم الثاني نفرض ك و ل عددين صحيحين موجبين يحققان الشروط الثلاثة المذكورة . فبما أن :

$$(٢ ك ل)^٢ + (ك^٢ - ل^٢)^٢ = (ك^٢ + ل^٢)^٢$$

فإن $س^٢ + ع^٢ = ص^٢$ أي أن (س ، ع ، ص) ثلاثية فيثاغورث . وهذه الثلاثية أولية لأن س و ص فرديان (اعتماداً على الشرط الثالث) كما أنه لا يوجد عامل مشترك بينهما ، لأن ذلك يستدعي وجود عامل مشترك بين ك و ل الأمر الذي يتنافى مع الشرط الأول .

وهكذا نجد أن هنالك تقابلاً بين مجموعة ثلاثيات فيثاغورث الاولية التي يكون فيها ع زوجياً ومجموعة الأزواج (ك ، ل) ضمن الشروط الثلاثة المذكورة . لنلاحظ بعد ذلك أن مجموعة الأزواج (ك ، ل) ،

ضمن الشروط الثلاثة السابقة ، قابلة للعد . ويكفي من أجل ذلك أن نضع الأزواج المرتبة التي مركبتها الأولى ٢ ، ثم تلك التي مركبتها الثانية ٣ ، وهكذا .. ونرتب الأزواج في كل مرة وفق كبر المرتبة الثانية على أن نتجاوز تلك الأزواج التي لا تحقق مركبتاها الشروط الثلاثة فنجد :

(٢،١) ، (٣،٢) ، (٤،١) (٤،٣) ، (٥،٢) ،
(٥،٤) ، (٦،١) ، (٦،٥) ، (٧،٢) ....

نقابل كل زوج مرتب (ك ، ل) من هذه المجموعة بثلاثيتين أوليتين، في الأولى نحصل عليها بالتعويض في (*) والثانية تنتج من الأولى بتبديل موضعي س و ع .

وبما أن مجموعة الأزواج (ك ، ل) قابلة للعد فإن (س ، ع ، ص) المقابلة قابلة للعد كذلك ، ويتم ذلك وفق الجدول التالي :

ك	ل	س	ع	ص	ك	ل	س	ع	ص
٢	١	٣	٤	٥	٥	٤	٩	٤٠	٤١
٣	٢	٥	١٢	١٣	٦	١	٣٥	١٢	٣٧
٤	١	١٥	٨	١٧	٦	٥	١١	٦٠	٦١
٤	٣	٧	٢٤	٢٥	٧	٢	٤٥	٢٨	٥٣
٥	٢	٢١	٢٠	٢٩	.	.	.	.	.

وهكذا تكون مجموعة ثلاثيات فيثاغورث الأولية موضوعة على شكل متوالية هي :

ث$_1$ = (٣ ، ٤ ، ٥) ، ث$_2$ = (٤ ، ٣ ، ٥)
ث$_3$ = (٥ ، ١٢ ، ١٣) ، ث$_4$ = (١٢ ، ٥ ، ١٣)
ث$_5$ = (١٥ ، ٨ ، ١٧) ، ث$_6$ = (٨ ، ١٥ ، ١٧)
ث$_7$ = (٧ ، ٢٤ ، ٢٥) ، ...

لننتقل بعد ذلك إلى ثلاثيات فيثاغورث بشكلها العام . لقد أشرنا فيما سبق اننا نستطيع الحصول على جميع ثلاثيات فيثاغورث انطلاقاً من الثلاثيات الأولية . فاذا وضعنا في السطر الأول من جدول، الثلاثية الاولية $ث_١$ والثلاثيات التي تنتج عنها بضرب كل مركبة من مركباتها بالاعداد (١ ، ٢ ، ٣ ، ...) على التوالي ثم وضعنا في السطر الثاني الثلاثية الأولية $ث_٢$ والثلاثيات التي تنتج عنها بضرب كل مركبة من مركباتها بالأعداد (١ ، ٢ ، ٣ ، ...) على التوالي وهكذا ... وإذا رمزنا للثلاثية التي تنتج عن الثلاثية $ث_ه$ بضربها بـ ه بالرمز ه $ث_ه$ فاننا نحصل على الجدول التالي :

$ث_١$	$٢ث_١$	$٣ث_١$	$٤ث_١$	...
$ث_٢$	$٢ث_٢$	$٣ث_٢$	$٤ث_٢$	...
$ث_٣$	$٢ث_٣$	$٣ث_٣$	$٤ث_٣$	...
.	.	.	.	.

وكما في التمرين رقم (٢٩٤) نلاحظ أن هذه المجموعة قابلة للعد ، وأنه يمكن وضعها في متوالية من الشكل :

$ث_١$ ، $٢ث_١$ ، $ث_٢$ ، $ث_٣$ ، $٢ث_٢$ ، $٣ث_١$ ، $٤ث_١$ ، $٣ث_٢$ ، $٢ث_٣$ ، $ث_٤$ ، ...

وهو المطلوب .

٢٩٦ – نعرّف العدد الجبري الحقيقي بأنه جذر حقيقي لمعادلة جبرية من الشكل :

$$ب_ه س^ه + ب_{ه-١} س^{ه-١} + \dots + ب_٢ س^٢ + ب_١ س + ب_٠ = ٠$$

حيث $ب_ه$ ، $ب_{ه-١}$ ، ... ، $ب_٢$ ، $ب_١$ ، $ب_٠$ أعداد صحيحة وحيث ه عدد كيفي صحيح موجب و $ب_ه \neq ٠$.

برهن أن مجموعة جميع الأعداد الجبرية الحقيقية قابلة للعد .

الحـل :

لنفرض $\text{ب}_{\text{ه}} > 0$ (فان لم يكن الأمر كذلك غيرنا اشارة طرفي المعادلة) ولنكوّن العدد الصحيح الموجب :

$$\text{ل} = \text{ه} + \text{ب}_{\text{ه}} + |\text{ب}_{\text{ه}-1}| + \dots + |\text{ب}_1| + |\text{ب}_0| \qquad (*)$$

نسمي هذا العدد الذي لا يقل عن اثنين **رتبة المعادلة الجبرية .**

من الواضح أنه يقابل كل معادلة جبرية رتبة ، وانه يقابل كل رتبة عدد منته من المعـادلات الجبرية لأن $\text{ه} \leqslant \text{ل}$ ، كما أن كلا من $|\text{ب}_{\text{ك}}| \leqslant \text{ل}$ ($\text{ك} = 0, 1, 2, \dots, \text{ه}$) وبهذا نتمكن من كتابة الاعداد الجبرية على شكل متوالية وفق ما يلي :

(١) نكتب الاعداد الجبرية التي هي جذور المعادلات ذات الرتبة ٢ . ولكن من أجل ل = ٢ لا نجد سوى $\text{ه} = 1$ ، $\text{ب}_1 = 1$ ، أي اننا لا نجد سوى المعادلة $\text{س} = 0$ وهذه لا تمطي سوى الجذر (صفر).

(٢) نكتب الأعداد الجبرية التي هي جذور المعادلات التي رتبتها ٣ . بالتعويض في (*) نجد الاحتمالات التالية :

$\text{ه} = 1$ ، $\text{ب}_1 = 2$ ، $\text{ب}_0 = 0$ و $\text{ه} = 1$ ، $\text{ب}_1 = 1$ ، $\text{ب}_0 = \mp 1$ و
$\text{ه} = 2$ ، $\text{ب}_1 = 1$ ، $\text{ب}_0 = 0$.

والمعادلات الجبرية المقابلة هي :

$$2\text{س} = 0 \quad \text{و} \quad \text{س} \mp 1 = 0 \qquad \text{س}^2 = 0 .$$

وهذه تعطي الجذور الجديدة التالية (مرتبة حسب كبرها) : -1 ، 1

(٤) عندما يكون ل = ٤ نحصل على المعادلات الجبرية :

$$\text{س} \mp 2 = 0 \ \text{و}\ 2\text{س} \pm 1 = 0 \ \text{و}\ 3\text{س} = 0 \ \text{و}\ \text{س}^2 \mp 1 = 0 \ \text{و}$$

$س^{٢} \mp س = ٠$ ، $٢ س^{١} = ٠$ ، $س^{٣} \mp ٠$

وهذه تعطي الجذور الجديدة التالية (مرتبة حسب كبرها) :

$$-٢ \text{ ، } -\frac{١}{٣} \text{ ، } +\frac{١}{٢}$$

فاذا تابعنا العمل على هذا الشكل نحصل على جميع الأعداد الجبرية الحقيقية مرتبة وفق متتالية . فمجموعة جميع الأعداد الجبرية الحقيقية قابلة للعد .

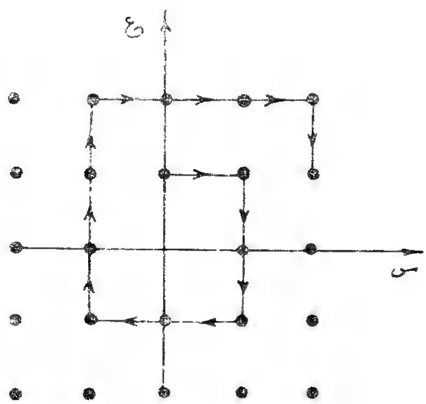
٢٩٧ – ان مجموعة نقط المستوي التي احداثيا كل منها عددان صحيحان قابلة للعد .

الحل :

نرتب النقط وفق الشكل فنحصل على :

(٠،٠) ، (٠،١) ، (١،١) ، (١ ، ٠) ، (١ ، –١) ، (٠ ، –١) ...

الأمر الذي يؤكد المطلوب .



الشكل (٢١٠)

٢٩٨ – برهن ان اجتماع عناصر جماعة قابلة للعد (على الأكثر) من المجموعات القابلة للعد (على الأكثر) والمنفصلة مثنى مثنى هي قابلة للعد (على الاكثر) .

الحل : لتكن :

$$\{ س_{١} ، س_{٢} ، ... \}$$

جماعة قابلة للعد (على الاكثر) من مجموعات قابلة للعد على الاكثر .

يمكن كتابة هذه المجموعات بالشكل :

$$\tilde{س}_1 = \{ س_{11} ، س_{21} ، س_{31} ، \dots ، س_{ن1} ، \dots \}$$

$$\tilde{س}_2 = \{ س_{12} ، س_{22} ، س_{32} ، \dots ، س_{ن2} ، \dots \}$$

$$\tilde{س}_3 = \{ س_{13} ، س_{23} ، س_{33} ، \dots ، س_{ن3} ، \dots \}$$

. . . .

$$\tilde{س}_ن = \{ س_{1ن} ، س_{2ن} ، س_{3ن} ، \dots ، س_{نن} ، \dots \}$$

. . . .

ويمكن كتابة اجتماع هذه المجموعات على شكل مجموعة قابلة للعد وفق ما يلي :

$$\{ س_{11} ، س_{21} ، س_{12} ، س_{31} ، س_{22} ، س_{13} ، س_{41} ، س_{32} ، س_{23} ، س_{14} ، \dots \}$$

(وقد رتبنا هذه العناصر مبتدئين أولاً بالعنصر الموجود في الزاوية العليا اليمنى وهو $س_{11}$ ثم كتبنا بعد ذلك العنصرين $س_{21}$ ، $س_{12}$ ، ثم العناصر الواقعة على المستقيمات الموازية للمستقيم الذي يقع عليه العنصران $س_{11}$ ، $س_{12}$ ، مبتدئين بأقربها منه وهكذا ... وعلى كل مستقيم نبدأ من الأعلى يساراً إلى الأسفل يميناً) .

٢٩٩ – برهن أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير الجبرية (المتسامية Transcendent) ليست قابلة للعد .

الحـــل :

لو كانت هذه المجموعة قابلة للعد فعندئذ يكون اجتماع بمجموعة الأعداد الجبرية وغير الجبرية قابلاً للعد (انظر التمرين السابق) وهذا يناقض ما نعلمه في أن مجموعة الاعداد الحقيقية غير قابلة للعد وهو المطلوب .

٣٠٠ – برهن أنـه إذا كان $ج_{١}$ =] ٠،١] فان قدرة $ج_{١}$ × $ج_{١}$ هي قدرة المستمر (بعبارة أخرى : برهن أن قدرة نقاط المربع
٠ < س ≤ ١ ، ٠ < ع ≤ ١ هي قدرة المستمر) .

الحل :

من المعلوم أن كل عدد ينتمي للمجال] ٠،١] يمكن كتابتـه على شكل كسر عشري غير منته (بشكل وحيد) . فاذا كان س و ع ، على سبيل المثال ، معطيين بالتمثيل العشري :

س = ٠,٣٠٦ ٠٠ ٧ ٨ ٩ ٠٠٠

ع = ٠,٠٠١ ٢ ٣ ٠٠٤ ٦ ٠٠٠

فاننا نكوّن في كل عدد مجموعات من الارقام بحيث تنتهي كل مجموعة عند أول رقم مغاير للصفر وعندئذ نقابل هذا الزوج من الأعداد بعدد ص على النحو التالي : نضع المجموعة الرقمية الاولى من س ثم المجموعـة الرقمية الاولى من ع فالمجموعة الرقمية الثانية من س فالمجموعة الرقمية الثانية من ع وهكذا ... فيكون في مثالنا :

ص = ٠,٣ ٠٠١ ٠٦ ٢ ٠٠ ٧ ٣ ٨ ٠٠ ٤ ٩ ٦٠٠٠ .

فكل زوج (س،ع) يقابل عدداً وحيداً ص . وبالعكس : بما أن كل مجموعة رقمية من س أو ع هي مجموعة رقمية في ص فان كل ص تقابل تماماً زوجاً معيناً (س،ع) هو بالطبع ذلك الزوج الذي تكونت منه ، فالعدد :

ص = ٠,١١ ١٠ ١٠ ١٠ ١٠ ١٠ ٠٠٠

يقابل :

س = ٠, ١ ١ ٠١ ٠٠٠

ع = ٠, ١ ٠١ ٠١ ٠٠٠

وبما أن هذا التقابل واحد لواحد فان $ج_{١}$ × $ج_{١}$ ≈ $ج_{١}$ وهو المطلوب .

٣٠١ – اذا كافأت كل مجموعة من مجموعتين مجموعة جزئية من الثانية فإن هاتين المجموعتين متكافئتان (نظرية كانتور – بيرنشتاين) .

الحل :

لتكن سـ و ع مجموعتين وليكن :

$$ع \approx س_1 \subset س \quad ، \quad س \approx ع_1 \subset ع$$

والمطلوب أن نبرهن أن $س \approx ع$.

بما أن $ع \approx س_1$ فان $ع_1$ تكافىء مجموعة $س_2$ جزئية من $س_1$

ومنه نجد : $س \approx س_2$ وبالتالي يوجد تطبيق تا : $س \to س_2$ غامر ومتباين . ونجد ، وفق هذا التطبيق ، أن :

$س_1 \to س_3 \quad (س_3 \subset س_2)$

$س_2 \to س_4 \quad (س_4 \subset س_3)$

$س_3 \to س_5 \quad (س_5 \subset س_4)$

. . . .

ولما كان تا غامراً ومتبايناً فان :

$س - س_1 \to س_2 - س_3$

$س_3 - س_4 \to س_1 - س_3$

$س_4 - س_5 \to س_2 - س_3$

. . . .

والمجموعتان :

$(س - س_1) \cup (س_2 - س_3) \cup (س_4 - س_5) \cup \ldots$

$(س_2 - س_3) \cup (س_4 - س_5) \cup (س_6 - س_8) \cup \ldots \quad (*)$

والثلاث تتكون كل واحدة منها من اجتماع مجموعات منفصلة مثنى مثنى، متكافئتان . لنضع الآن :

$$\text{صـ} = \text{سـ} \cap \text{سـ}_1 \cap \text{سـ}_2 \cap \text{سـ}_3 \cap \dots$$

فعندئذ يمكننا أن نبرهن بسهولة أن :

$$\text{سـ} = \text{صـ} \cup (\text{سـ} - \text{سـ}_1) \cup (\text{سـ}_1 - \text{سـ}_2) \cup (\text{سـ}_2 - \text{سـ}_3) \cup \dots$$

$$\text{سـ}_1 = \text{صـ} \cup (\text{سـ}_1 - \text{سـ}_2) \cup (\text{سـ}_2 - \text{سـ}_3) \cup (\text{سـ}_3 - \text{سـ}_4) \cup \dots$$

ومنه نجد :

$$\text{سـ} = [\text{صـ} \cup (\text{سـ}_1 - \text{سـ}_2) \cup (\text{سـ}_3 - \text{سـ}_4) \cup \dots] \cup [(\text{سـ} - \text{سـ}_1) \cup (\text{سـ}_2 - \text{سـ}_3) \cup \dots]$$

$$\text{سـ}_1 = [\text{صـ} \cup (\text{سـ}_1 - \text{سـ}_2) \cup (\text{سـ}_3 - \text{سـ}_4) \cup \dots] \cup [(\text{سـ}_2 - \text{سـ}_3) \cup (\text{سـ}_4 - \text{سـ}_5) \cup \dots]$$

ان ما بين القوسين الكبيرتين الاوليتين في الطرف الايمن في كل من المساواتين الاخيرتين العبارة ذاتها ، أما ما بين القوسين الباقيتين فنجد بسبب (*) مجموعتين متكافئتين وبالتالي $\text{سـ} \approx \text{سـ}_1$ وبما أن $\text{سـ}_1 \approx \text{ع}$ فإن $\text{سـ} \approx \text{ع}$ وهو المطلوب .

٣٠٢ – برهن انه إذا كانت مـ و مـَ و مـً ثلاثة أعداد أساسية وإذا كان $\text{مـ} < \text{مـَ}$ و $\text{مـَ} < \text{مـً}$ فان $\text{مـ} < \text{مـً}$.

الحل :

لتكن سـ و ع و صـ المجموعات الممثلة للأعـداد الاساسية مـ و مـَ ومـً على الترتيب ، فاستناداً إلى الفرض يوجد مجموعتان جزئيتان ع_1 و صـ_1 بحيث :

صـ١ ≈ ع ، ع١ ≈ سـ ، صـ ⊇ سـ١ ، ع ⊇ ع١

واستناداً إلى التكافؤ الأخير يوجد تقابل بين المجموعتين ع و صـ١ وبما أن ع مجموعة جزئية من ع فانه يوجد مجموعة صـ٢ جزئية من صـ١ بحيث ع١ ≈ صـ٢ وبالتالي سـ ≈ صـ٢ . بقي أن نبرهن انه لا يمكن لـ صـ أن تكافىء أية مجموعة جزئية من سـ . لنفرض مؤقتاً أنه يوجد مجموعة جزئية من سـ ، ولتكن سـ١ بحيث صـ ≈ سـ١ ⊇ سـ . عندئذ بما أن سـ ≈ ع فانه يوجد مجموعة ع٢ جزئية من ع١ بحيث سـ١ ≈ ع٢ وبالتالي ـ ≈ ع٢ وهذا يتنافى مع كون مَ < مً وهو المطلوب .

٣٠٣ اذا كان م عدداً أساسياً غير محدود و ن عدداً أساسياً محدوداً فإن مْ > ن .

الحل :

لنفرض أن سـ مجموعة ممثلة لـ م وأن ع مجموعة ممثلة لـ ن فعندئذ يوجد في سـ مجموعة جزئية مكافئة للمجموعة ع (سـ مجموعة غير منتهية و ع مجموعة منتهية) غير أن العكس غير ممكن أي أنه لا يمكن أن نجد في ع المجموعة المنتهية ، مجموعة جزئية مكافئة للمجموعة غير المنتهية سـ .

٣٠٤ - أثبت ان ا. < ر. < تا.

الحل :

اذا أخذنا المستمر [٠، ١] ممثلاً لـ ر. فعندئذ نعلم أن المجموعة { ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ... } الجزئية من المستمر مجموعة قابلة للعد ولكنه لا يمكن للمستمر أن يكافىء مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد وإلا لكافأ

المستمر مجموعة قابلة للعد (حسب التمرين ٣٠١) وَهذا غير ممكن ومنه ينتج أن ﭐ. > ر. .

كذلك إذا أخذنا مجموعة التطبيقات الحقيقيــة تا المعرفة على المجــال [٠،١] ممثلة لـ با فإنه يوجد مجموعة جزئية من مجموعة التطبيقات هذه تكافىء المستمر . هذه المجموعة هي التطبيقات الثابتة :

تا (س) = { ب لما س = ب ∈ [٠،١]
٠ لما س ∈ {[٠،١] − ب}

فكل عنصر من المستمر يقابل تطبيقاً وبالعكس كل تطبيق من المجموعة الجزئية التي ذكرناها يقابل عنصراً من المستمر . وبالوقت نفسه لا يمكن لمجموعة التطبيقات تا أن تكافىء مجموعة جزئية من المستمر وإلا (حسب التمرين ٣٠١) لكان المستمر مكافئاً للمجموعة تا وهذا غير ممكن وهو المطلوب .

٣٠٥ – اذا كانت ب ، حـ ، ى ثلاثة أعداد أساسية فاثبت أن :

ب + حـ = حـ + ب

(ب + حـ) + ى = ب + (حـ + ى)

الحـل :

إذا كانت سـ و عـ و صـ ثلاث مجموعات منفصلة مثنى مثنى ممثلة للأعداد ب ، حـ ، ى على الترتيب فإن :

سـ ∪ عـ ≈ عـ ∪ سـ

(سـ ∪ عـ) ∪ صـ ≈ سـ ∪ (عـ ∪ صـ)

الأمر الذي ينتج عنه المطلوب .

٣٠٦ - برهن أنه إذا كان $م_١ \geq ن_١$ ، $م_٢ \geq ن_٢$ حيث $م_١$ ، $م_٢$ ، $ن_١$ ، $ن_٢$ أعداد أساسية فان :

$$م_١ + م_٢ \geq ن_١ + ن_١$$

الحل :

لتكن $س_١$ ، $س_٢$ ، $ع_١$ ، $ع_٢$ أربع مجموعات منفصلة مثنى مثنى ، ممثلة للأعداد $م_١$ ، $م_٢$ ، $ن_١$ ، $ن_٢$ على الترتيب . عندئذ يوجد حسب الفرض مجموعة $\overline{ع_١}$ جزئية من $ع_١$ ومجموعة $\overline{ع_٢}$ جزئية من $ع_٢$ بحيث $س_١ \approx \overline{ع_١}$ و $س_٢ \approx \overline{ع_٢}$. وبما أن المجموعات المذكورة منفصلة فان $س_١ \cup س_٢ \approx \overline{ع_١} \cup \overline{ع_٢}$. ولما كانت $\overline{ع_١} \cup \overline{ع_٢}$ جزئية من $ع_١ \cup ع_٢$ فان $م_١ + م_٢ \geq ن_١ + ن_٢$ وهو المطلوب .

٣٠٧ - برهن أن :

$$(١) \quad ا_٠ + ن = ا_٠$$

$$(٢) \quad ا_٠ + ا_٠ = ا_٠$$

حيث ن عدد أساسي محدود .

الحل :

(١) لنفرض $\{١ ، ٢ ، ... ، ن\}$ المجموعة الممثلة لـ ن ولنفرض $\{ن + ١ ، ن + ٢ ، ...\}$ المجموعة الممثلة لـ $ا_٠$ ، من الواضح أن اجتماع هاتين المجموعتين هو مجموعة الأعداد الطبيعية التي قدرتها $ا_٠$.

(٢) لبرهان القاعدة الثانية يكفي أن نمثل الحد الأول من الطرف الأيمن بمجموعة الأعداد الطبيعية الفردية والحد الثاني بمجموعة الأعداد الزوجية فعندئذ يكون اجتماع هاتين المجموعتين هو مجموعة الأعداد الطبيعية التي قدرتها $ا_٠$.

٣٠٨ – برهن أن :

$$ر_٠ + ر_٠ = ر_٠$$

$$ر_٠ + ن = ر_٠ \quad \text{(حيث ن عدد أساسي محدود)}$$

$$ر_٠ + ﻫ_٠ = ر_٠$$

الحل :

نبدأ ببرهان المساواة الأولى : لنعتبر المجموعة [١،٠] ممثل الحد الأول في الطرف الأيمن والمجموعة [٢،١] ممثل الحد الثاني . ان اجتماع هاتين المجموعتين هو المجموعة [٢،٠] التي لها قدرة المستمر وهو المطلوب .

ولبرهان المساواة الثانية نلاحظ أن $ر_٠ \leqq ن + ر_٠$ لأن المجموعة الممثلة للطرف الأيمن تكافىء مجموعة جزئية من المجموعة الممثلة للطرف الأيسر . ثم إن : $ن + ر_٠ \leqq ر_٠ + ر_٠ = ر_٠$ اذن :

$$ر_٠ \leqq ن + ر_٠ \leqq ر_٠ \quad \text{ومنه} \quad ن + ر_٠ = ر_٠$$

وبالطريقة نفسها يمكن برهان المساواة الأخيرة .

٣٠٩ – برهن أنه إذا كانت ب ، حـ ، ى ثلاثة أعداد أساسية فان :

$$ب \times حـ = حـ \times ب$$

$$(ب \times حـ) \times ى = ب \times (حـ \times ى)$$

$$(ب + حـ) \times ى = ب \times ى + حـ \times ى$$

الحـــل :

إذا كانت سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات منفصلة مثنى مثنى ممثلة لـ ب ، حـ ، ى على الترتيب فان :

$$سـ \times ع \approx ع \times سـ$$

$$(\text{سـ} \times \text{ع}) \times \text{صـ} \approx \text{سـ} \times (\text{ع} \times \text{صـ})$$

$$(\text{سـ} \cup \text{ع}) \times \text{صـ} \approx (\text{سـ} \times \text{صـ}) \cup (\text{ع} \times \text{صـ})$$

ولقد سبق برهان التكافؤين الأول والثاني في التمرين ٢٨٩ ، ويبرهن على التكافؤ الثالث بالطريقة نفسها . ومن هذه التكافؤات ينتج المطلوب مباشرة ، إذا تذكرنا أن العدد الأساسي لـ $\text{سـ} \times \text{ع}$ هو ب . حـ وأن العدد الأساسي لـ $\text{ع} \times \text{صـ}$ هو حـ . ء وأن العدد الأساسي لـ $\text{سـ} \times \text{ع} \times \text{صـ}$ هو ب . حـ . ء .

٣١٠ – برهن أنه إذا كانت م_1 و م_2 و ن_1 و ن_2 أعداداً أساسية وكان :

$$\text{م}_1 \leq \text{ن}_1 \quad ، \quad \text{م}_2 \leq \text{ن}_2$$

فإن :

$$\text{م}_1 \text{م}_2 \leq \text{ن}_1 . \text{ن}_2$$

الحل :

لتكن سـ_1 ، سـ_2 ، ع_1 ، ع_2 مجموعات ممثلة لـ م_1 ، م_2 ، ن_1 ، ن_2 على الترتيب عندئذ يوجد مجموعة $\overline{\text{ع}}_1$ جزئية من ع_1 ومجموعة $\overline{\text{ع}}_2$ جزئية من ع_2 بحيث يكون :

$$\text{سـ}_1 \approx \overline{\text{ع}}_1 \quad ، \quad \text{سـ}_2 \approx \overline{\text{ع}}_2$$

وبالتالي يكون :

$$\text{سـ}_1 \times \text{سـ}_2 \approx \overline{\text{ع}}_1 \times \overline{\text{ع}}_2 \subseteq \text{ع}_1 \times \text{ع}_2$$

$$|\text{سـ}_1 \times \text{سـ}_2| \leq |\text{ع}_1 \times \text{ع}_2|$$

وبالعودة إلى تعريف ضرب الأعداد الأساسية نجد المطلوب .

٣١١ - برهن أن :

(١) ا. . ا. = ا.

(٢) ن . ا. = ا. (∀ العدد المحدود ن)

الحل :

(١) نفرض أن ا. ممثل بالمجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } فعندئذ يتمثل الجداء ا. · ا. بمجموعة الأزواج المرتبة (ب،حـ) أي بالمجموعة :

(١،١) ، (١،٢) ، ...

(٢،١) ، (٢،٢) ، ...

(٣،١) ، (٣،٢) ، ...

. . . . . .

وهذه المجموعة قابلة للعد كما يبرهن بسهولة .

(٢) نلاحظ استناداً إلى التمرين السابق أن :

ا. ≤ ن ا. ≤ ا. . ا. = ا.

ومنه ينتج المطلوب .

٣١٢ - برهن أن :

(١) ا. . ر. = ر.

(٢) ن . ر. = ر. (∀ العدد المحدود ن)

(٣) ر. . ر. = ر.

الحل :

لنفرض أن { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } مجموعة ممثلة لـ ا. وأن] ٠،١ [ممثلة لـ ر. فعندئذ تكون مجموعة الجداء لهاتين المجموعتين هي مجموعة

الأزواج (ن،س) حيث ن عدد طبيعي موجب كيفي و س عنصر كيفي من] ١،٠ [. فاذا قابلنا كل زوج (ن،س) بالعدد ن + س فعندئذ نكون قد قابلنـــا مجموعة الجداء الديكارتي (ن،س) بنصف المستقيم (س > ١) . ونصف المستقيم هذا ذو قدرة تساوي قدرة المستمر وهو المطلوب .

(٢) إن :

ر. ⩽ ن. ر. ⩽ أ. . ر. = ر.

(٣) نفرض أن المستمر ممثل بالمجال] ١،٠] عندئذ تتمثل ر. بالمربع ٠ < س ⩽ ١ ، ٠ < ع ⩽ ١ الذي له قدرة المستمر كما في تمرين سابق وهو المطلوب .

★ ★

تمارين غير محلولة

٣١٣ – ابحث في التقابل بين المجموعتين :

مج = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } و ح = { ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ... }

واستنتج من ذلك تكافؤ المجموعتين .

٣١٤ – برهن أن مجموعة جميع الأعداد العادية (الموجبة والسالبة والصفر) قابلة للعد .

٣١٥ – ابحث في تكافؤ مجموعتي نقط ضلعين في مثلث .

٣١٦ – برهن أن مجموعة جميع الأعداد الجبرية (الحقيقية والعقدية) قابلة للعد .

٣١٧ – بيّن أن مجموعة جميع الأزواج المرتبة (ب ، حـ) حيث ب و حـ عددان صحيحان ، قابلة للعد .

٣١٨ – عيّن قدرة المجموعة ك :

ك = { س : جب $\frac{\pi}{٢}$ س = ١ ∧ س ∈ ح }

٣١٩ – هل مجموعة نقط المستقيم ع = $\frac{٣}{٤}$ س + ١ والتي احداثيا كل منها عددان صحيحان قابلة للعد .

٣٢٠ – هل مجموعة نقط القطع ع = $\frac{١}{س}$ والتي احداثيا كل منهـــا عددان صحيحان قابلة للعد

٣٢١ – برهن انه إذا كان كل من سـ و ع مجموعة قابلة للعد فان المجموعة سـ × ع قابلة للعد كذلك .

٣٢٢ – يمكن مقابلة الأعداد الصحيحة بالأعداد الطبيعية الموجبة كما يلي:

١	٢	٣	٤	٥	...
٠	١	–١	٢	–٢	...

أوجد التطبيق تا : ط* ← صـ الذي يعطي ذلـك التقابل بين ط* و صـ .

٣٢٣ = برهن أن قدرة نقاط المكعب :

$$٠ \leqq س \leqq ١ \quad ، \quad ٠ \leqq ع \leqq ١ \quad ، \quad ٠ \leqq ص \leqq ١$$

هي قدرة المستمر .

٣٢٤ – إذا كان م عدداً أساسياً غير محدود فان م ≥ ℵ.

٣٢٥ – برهن أنه إذا كان م ≥ ن (م و ن عددان أساسيان) فإن:

$$م . ل \geqq ن . ل \qquad \forall \text{ العدد الأساسي } ل$$

$$م + ل \geqq ن + ل$$

٣٢٦ – برهن أنه مهما كان العدد غير المحدود م فإن :

$$ℵ. + م = م$$

٣٢٧ – برهن أنه إذا كانت ب مجموعة الأعداد الحقيقية غير الجبرية فان |ب| = ر.

أجوبة وإرشادات

٣١٣ – هنالك تطبيق غامر ومتباين : مج ← ج١

س ← ١٠^(س−١)

٣١٤ – سبق لنا في تمرين محلول أن وجدنا أن مجموعة جميع الأعداد العادية الموجبة قابلة العد ، فاذا فرضنا {ر١ ، ر٢ ، ر٣ ، ...} المتوالية التي وضعت وفقها الأعداد العادية الموجبة فعندئذ تكون مجموعة جميع الأعداد العادية هي :

{ ... ، −ر١ ، ر١ ، −ر٢ ، ر٢ ، ... }

الأمر الذي يؤكد قابلية العد للمجموعة المطلوبة .

٣١٥ – المجموعتان متكافئتان لأن هناك تقابلا بين الضلعين ويكفي من أجل ذلك أن نقابل كل نقطة من أحد الضلعين بالنقطة التي تقع معها على مستقيم مواز للضلع الثالث .

٣١٨ – ك = {١ ، −٣ ، ٥ ، −٧ ، ٩ ، −١١ ، ...} ويكون :
|ك| = م.

٣١٩ – نعم : النقط المطلوبة هي :

{(١،٠) ، (٤،٤) ، (−٤ ، −٢) ، (٨،٧) ، ...}

٣٢٠ - لا ، بل هي منتهية حيث تتكون من الزوجين (١ ، ١) ، (- ١ ، - ١) فقط .

٣٢٣ - تا (س) = $\begin{cases} -\frac{س}{٢} + \frac{١}{٢} & \text{عندما يكون س فردياً} \\ \frac{س}{٢} & \text{عندما يكون س زوجياً} \end{cases}$

٣٢٥ - الجواب واضح لأن في كل مجموعة غير منتهية مجموعة جزئية قابلة للعد .

★

الفهرس

الفصل الثالث : العمليات على المجموعات

الفصل الرابع : الجداء الديكارتي

الفصل الثامن : قدرة المجموعات (الاعداد الاساسية)